Prvi međuispit

9. travnja 2010.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (4 boda)

a) *(1 bod)* Je li sustav opisan sa $y(t) = au(t) + b$ linearan ili nelinearan (a i b su parametri sustava)?

b) *(2 boda)* Nacrtajte blokovsku shemu barem jednog nepobuđenog zatvorenog kruga upravljanja koji ima beskonačno mnogo ravnotežnih stanja, ovisno o početnim uvjetima.

c) *(1 boda)* Napišite barem jednu diferencijalnu jednadžbu nepobuđenog nelinearnog sustava s izlaznom veličinom $x(t)$ koji ima barem jednu ravnotežnu točku u $x = 0$.

2. zadatak (9 bodova)

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x^3\frac{dx}{dt} + x = 0$$

a) *(2 boda)* Odredite jednažbu izoklina.

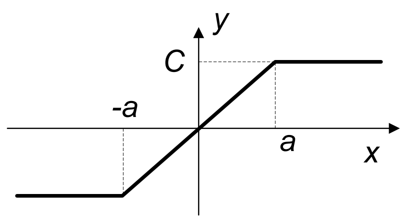
b) *(5 bodova)* Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područjâ u faznoj ravnini $(\dot{x}, x)$ gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

c) *(1 bod)* Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = -2$.

d) *(1 bod)* Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = 2$.

3. zadatak (7 bodova)

Na Slici 4 prikazan je nelinearni element zasićenje. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$.



Slika 1: Zasićenje.

a) *(1 bod)* Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ kada je $X_m < a$.

b) *(2 boda)* Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke ako je $X_m > a$.

c) *(4 bodova)* Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m)+jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

Napomena: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ i $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

4. zadatak (6 bodova)

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se nelinearni element i proces opisan funkcijom prijenosa $G(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$. Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$. Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa ako je na izlazu iz procesa zabilježen osnovni harmonik oscilacija oblika $y(t) = X_m \sin(\omega t)$.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

a) *(1 bod)* Je li sustav opisan sa $y(t) = au(t) + b$ linearan ili nelinearan (y je izlaz, u je ulaz, a i b su parametri sustava)?
Nelinearan.

b) *(2 boda)* Nacrtajte blokovsku shemu barem jednog nepobuđenog zatvorenog kruga upravljanja koji ima beskonačno mnogo ravnotežnih stanja, ovisno o početnim uvjetima.
To je npr. bilo koji zatvoreni krug upravljanja koji se sastoji od nelinearnog elementa sa zonom neosjetljivosti i linearnog procesa.

c) *(2 boda)* Napišite barem jednu diferencijalnu jednadžbu nepobuđenog nelinearnog sustava s izlaznom veličinom $x(t)$ koji ima barem jednu ravnotežnu točku u $x = 0$.
Npr. $\dot{x} - x^2 = 0$. Nije bitno je li ravnotežno stanje stabilno ili ne, budući da nije ex plicite navedeno u zadatku. $\dot{x} - x = 0$ se ne priznaje jer je taj sustav linearan.

Zadatak 2

Zadan je sustav opisan diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 0.5x^3\frac{dx}{dt} + x = 0$$

a) *(2 boda)* Odredite jednažbu izoklina.

$$\ddot{x} - 0.5x^3\dot{x} + x = 0$$

Neka je $y = \frac{dx}{dt}$ iz čega slijedi

$$\dot{y} - 0.5x^3y + x = 0 / \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.5x^3 - \frac{x}{y} = m$$

Na poslijetku jednadžba izoklina je

$$y = \frac{x}{0.5x^3 - m}$$

gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

b) *(5 bodova)* Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini $(\dot{x}, x)$ gdje je nagib trajektorije

- jednak 0,
  Nagib je 0 na $y = \frac{2}{x^2}$ i $x = 0$.

$$m = 0 \Rightarrow y = 2, x = 0$$

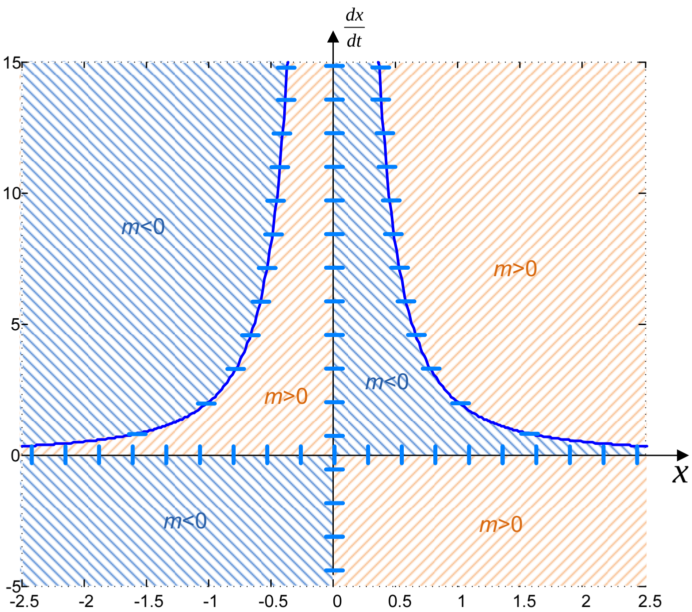
- jednak ∞,
  Nagib je ∞ na $y = 0$.

$$m = \infty \Rightarrow y = 0$$

- pozitivan i
- negativan.
  Iz jednadžbe $m = \frac{x\left(0.5x^2y - x\right)}{y}$ slijede sljedeći uvjeti za predznak od m

Tablica 1: Tablica uz rješenje Zadatka 1.

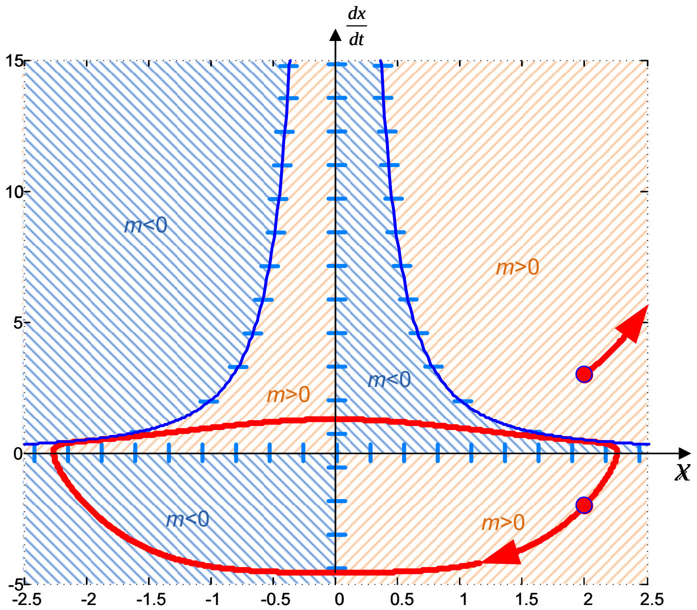
$y > 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$
$y > 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y < 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	nemoguće
$y < 0$	$\wedge$	$x > 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m > 0$
$y < 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y > \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	nemoguće
$y < 0$	$\wedge$	$x < 0$	$\wedge$	$y < \frac{2}{x^2}$	$\Rightarrow$	$m < 0$



Slika 2: Plava linije je krivulja $y = \frac{2}{x^2}$. Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib ∞. Narančasto iscrtkana područja su područja s negativnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s pozitivnim nagibom trajektorije.

c) *(1 bod)* Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = -2$.

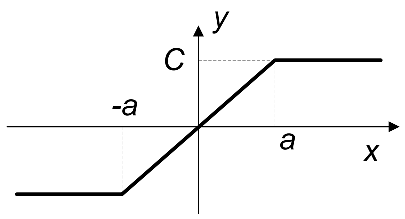
d) *(1 bod)* Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $\dot{x}(0) = 2$.
Smjerovi o kojem ide tajektorija se određuju iz početne derivacije, tj. iz $\dot{x}(0)$. Ukoliko je veći od 0, x mora rasti u početku, i obratno. Ove dvije trajektorije su jednoznačno određene i prikazane Slikom 3.



Slika 3: Trajektorije uz dva zadana početna uvjeta

Zadatak 3

Na Slici 4 prikazan je nelinearni element zasićenje. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$.



Slika 4: Zasićenje.

a) *(1 bod)* Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ kada je $X_m < a$.

$$P_N = \frac{1}{\pi X_m} \int_0^{2\pi} \frac{C}{a} X_m \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi X_m} \frac{C}{a} X_m \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi =$$
$$= \frac{C}{a\pi}\left(\frac{1}{2}2\pi - \frac{\sin 2\pi - \sin 0}{4}\right) = \frac{C}{a}$$

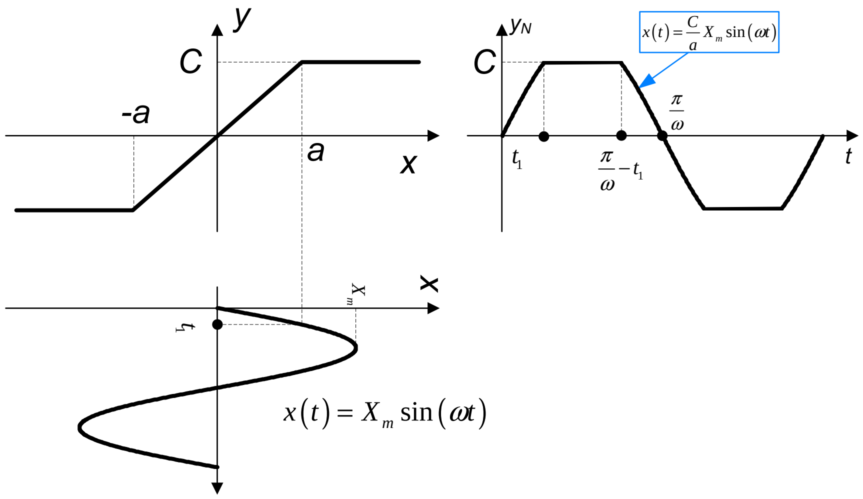
Ovo je naravno jasno i bez računanja budući da za $X_m < a$ nelinearni element je jednak pojačanju. Imaginarni dio je 0 jer je nelinearni element jednoznačan, $Q_N = 0$.

b) *(2 boda)* Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke ako je $X_m > a$.

c) *(4 bodova)* Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m)+jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

Ulazni signal je sinusni, oblika $x = X_m \sin(\omega t)$. U trenutku t_1, iznos ulaznog signala je a, stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin\varphi_1$$



Slika 5: Zasićenje i njegov izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije je 0 budući da je nelinearni element jednoznačan. Realni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned} P_N = \tfrac{1}{\pi X_m}\Bigg[\int_0^{\varphi_1}\tfrac{C}{a}X_m\sin^2\varphi d\varphi \quad &+ \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} C\sin\varphi d\varphi + \int_{\pi-\varphi_1}^{\pi+\varphi_1}\tfrac{C}{a}X_m\sin^2\varphi d\varphi + \\ &+ \int_{\pi+\varphi_1}^{2\pi-\varphi_1} -C\sin\varphi d\varphi + \int_{2\pi-\varphi_1}^{2\pi}\tfrac{C}{a}X_m\sin^2\varphi d\varphi\Bigg] = \\ &= \tfrac{1}{\pi X_m}\left[4\int_0^{\varphi_1}\tfrac{C}{a}X_m\sin^2\varphi d\varphi + 2\int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1} C\sin\varphi d\varphi\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\varphi_1}\sin^2\varphi d\varphi &= \int_0^{\varphi_1}\tfrac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = \tfrac{1}{2}\varphi_1 - \tfrac{1}{4}(\sin 2\varphi_1 - \sin 0) = \\ &= \tfrac{1}{2}\left(\arcsin\tfrac{a}{X_m} - \sin\varphi_1\cos\varphi_1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\arcsin\tfrac{a}{X_m} - \tfrac{a}{X_m}\sqrt{1-\left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2}\right) \\ \int_{\varphi_1}^{\pi-\varphi_1}\sin\varphi d\varphi &= -\cos(\pi-\varphi_1) + \cos\varphi_1 = 2\cos\varphi_1 = 2\sqrt{1-\left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_N &= \tfrac{1}{\pi X_m}\left[2\tfrac{C}{a}X_m\arcsin\tfrac{a}{X_m} - 2C\sqrt{1-\left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2} + 4C\sqrt{1-\left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2}\right] = \\ &= \tfrac{2C}{\pi a}\left[\arcsin\tfrac{a}{X_m} + 2\tfrac{a}{X_m}\sqrt{1-\left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2}\right] \end{aligned}$$

Zadatak 4

U otvorenom krugu upravljanja nalazi se nelinearni element i proces opisan funkcijom prijenosa $G(s) = \frac{Ks}{Ts+1}$. Na ulaz u nelinearni element narinut je signal oblika $x(t) = X_m\sin(\omega t)$. Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m)+jQ(X_m)$ nelinearnog elementa ako je na izlazu iz procesa zabilježen osnovni harmonik oscilacija oblika $y(t) = X_m\sin(\omega t)$.

Neka je signal na ulazu u nelinearni element $x(t) = X_m \sin \omega t$, na izlazu iz nelinearnog elementa (ulazu u proces) $u(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$ i na izlazu iz procesa $y(t) = Y_m \sin(\omega t + \varphi_y)$.
Vrijedi

$$\begin{aligned} U_m &= |G_N| X_m &(1) \\ \varphi_u &= \varphi(G_N) &(2) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} Y_m &= |G_P(j\omega)| U_m &(3) \\ \varphi_y &= \varphi(G_P(j\omega)) + \varphi_u &(4) \end{aligned}$$

Iz funkcije prijenosa procesa slijedi

$$\begin{array}{l} G_P(j\omega) = \frac{Kj\omega}{1+jT\omega} = \frac{Kj\omega(1-jT\omega)}{1+(T\omega)^2} = \frac{K\omega}{1+(T\omega)^2}(j + T\omega) \\ |G_P(j\omega)| = \frac{K\omega}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} \\ \varphi(G_P(j\omega)) = \arctan \frac{1}{T\omega} \end{array}$$

Budući da je $\varphi_y = 0$, iz (4) slijedi

$$\varphi_u = -\arctan \frac{1}{T\omega}.$$

Budući da je $Y_m = X_m$, iz (3) slijedi

$$U_m = X_m \frac{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}{K\omega}.$$

Uvrštavanjem u (1) dobije se

$$|G_N| = \frac{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}{K\omega}.$$

S obzirom da je $G_N = P_N + jQ_N$, slijedi da je $|G_N| = \sqrt{P_N^2 + Q_N^2}$ od kuda proizlazi

$$P_N^2 + Q_N^2 = \frac{1 + (T\omega)^2}{(K\omega)^2} \tag{5}$$

Uvrštavanjem u (2) dobije se

$$\varphi(G_N) = -\arctan \frac{1}{T\omega} = \arctan\left(-\frac{1}{T\omega}\right).$$

S obzirom da je $G_N = P_N + jQ_N$, slijedi da je $\varphi(G_N) = \arctan \frac{Q_N}{P_N}$ od kuda proizlazi jedno od rješenja

$$\frac{Q_N}{P_N} = -\frac{1}{T\omega}. \tag{6}$$

Kombinacijom jednadžbi (5) i (6) dobije se

$$\boxed{\begin{aligned} P_N &= \frac{T}{K} \\ Q_N &= -\frac{1}{K\omega} \end{aligned}}$$