Prvi međuispit

1. travnja 2011.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (7 bodova)

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\,(1-x-y)\\ \dot{y} &= y\,(0.75-y-0.5x)\,.\end{aligned}$$

a) *(6 bodova)* Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

b) *(1 bod)* U faznoj ravnini x–y skicirajte trajektoriju uz proizvoljan početni uvjet.

2. zadatak (6 bodova)

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\,(1-0.5y)\\ \dot{y} &= y\,(-0.75+0.25x)\,.\end{aligned}$$

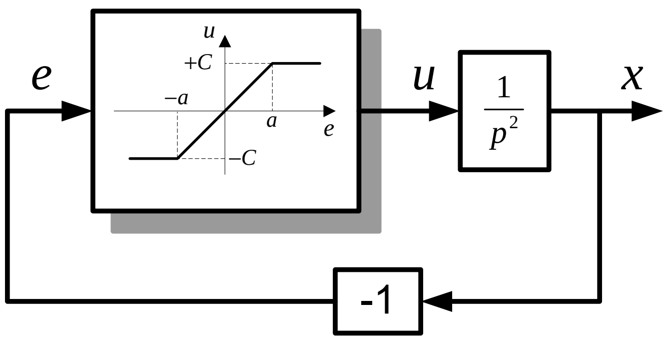
a) *(2 boda)* Odredite jednažbu izoklina.

b) *(3 bodova)* Uz pretpostavku da je $x \geq 0$ i $y \geq 0$ odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

c) *(1 bod)* Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 4$ i $y(0) = 3$ ako se zna da je ravnotežno stanje $x = 3$, $y = 2$ tipa centar.

3. zadatak (7 bodova)

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 1.



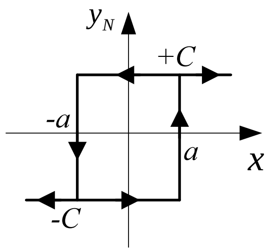
Slika 1: Zatvoreni krug upravljanja.

a) *(4 bod)* Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

b) *(3 boda)* Uz parametre sustava $C = 1.5$, $a = 3$ i početne uvjete $x(0) = 4$ i $\dot{x}(0) = 1$, izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini x–$\dot{x}$. *Napomena:* Nije potrebno određivati smjer trajektorije!

4. zadatak (6 bodova)

Na slici 2 prikazan je nelinearni element dvopoložajni relej s histerezom. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$.



Slika 2: Dvopoložajni relej s histerezom.

a) *(1 bod)* Koji harmonici se javljaju ma izlazu iz nelinearnog elementa?

b) *(1 bod)* Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke ako je $X_m > a$.

c) *(3 boda)* Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

d) *(1 bod)* Koliko je fazno zaostajanje osnovnog harmonika na izlazu nelinearnog elementa u odnosu na signal na ulazu?

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(1 - x - y) \\ \dot{y} &= y\,(0.75 - y - 0.5x)\,. \end{aligned}$$

a) *(6 bodova)* Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

Ravnotežna stanja se dobiju izjednačavanjem derivacija s 0:

$$\begin{aligned} 0 &= x\,(1 - x - y) \\ 0 &= y\,(0.75 - y - 0.5x)\,. \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

I. $(0, 0)$
II. $(0, 0.75)$
III. $(1, 0)$
IV. $(0.5, 0.5)$

linearizacijom se dobije:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= (1 - 2x_0 - y_0)\,\Delta x - x_0 \Delta y \\ \Delta\dot{y} &= -0.5y_0\Delta x + (0.75 - 2y_0 - 0.5x_0)\,\Delta y \end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2x_0 - y_0 & -x_0 \\ -0.5y_0 & 0.75 - 2y_0 - 0.5x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Za svaku ravntežnu točku se može napisati:

I. $(0, 0)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0.75 \Rightarrow \boxed{\textbf{nestabilan čvor}}$

II. $(0, 0.75)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = -0.75 \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$

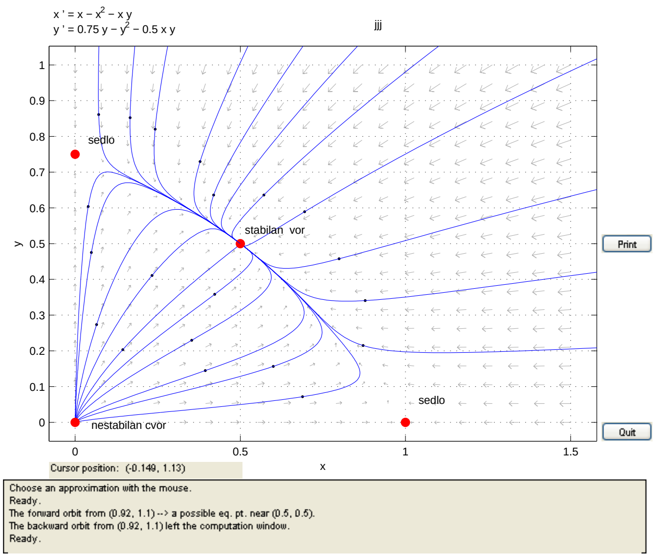
III. $(1, 0)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 0.25 \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$

IV. $(0.5, 0.5)$

$$\begin{aligned} &\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{bmatrix} \\ &\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{J}) = (\lambda + 0.5)^2 - 0.125 = s^2 + s + 0.125 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_1 = \tfrac{-2-\sqrt{2}}{4} < 0, \lambda_2 = \tfrac{-2+\sqrt{2}}{4} < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\textbf{stabilan čvor}}$

b) *(1 bod)* U faznoj ravnini x–y skicirajte trajektoriju uz proizvoljan početni uvjet.



Slika 3: Trajektorija uz zadatak.

Zadatak 2

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(1-0.5y) \\ \dot{y} &= y\,(-0.75+0.25x)\,. \end{aligned}$$

a) *(2 boda)* Odredite jednažbu izoklina.

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y\,(-0.75+0.25x)}{x\,(1-0.5y)}$$

Na poslijetku jednadžba izoklina je

$\boxed{y = \frac{4mx}{x(1+2m)-3}}$

gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

b) *(3 bodova)* Uz pretpostavku da je $x \geq 0$ i $y \geq 0$ odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

- jednak 0,
  Nagib je 0 na $y = 0$ i $x = 3$.
  $\boxed{m = 0 \Rightarrow y = 0 \wedge x = 3}$
- jednak ∞,
  Nagib je ∞ na $x = 0$ i $y = 2$.
  $\boxed{m = \infty \Rightarrow y = 2 \wedge x = 0}$
- pozitivan i
- negativan.
  Iz jednadžbe izoklina, uz uvjete $x \geq 0$ i $y \geq 0$ koji su navedeni u zadatku, slijede sljedeći uvjeti za predznak od m

Tablica 1: Tablica uz rješenje Zadatka 3.

	$-0.75+0.25x > 0 \Rightarrow x > 3$	$-0.75+0.25x < 0 \Rightarrow x < 3$
$1-0.5y > 0 \Rightarrow y < 2$	$m > 0$	$m < 0$
$1-0.5y < 0 \Rightarrow y > 2$	$m < 0$	$m > 0$

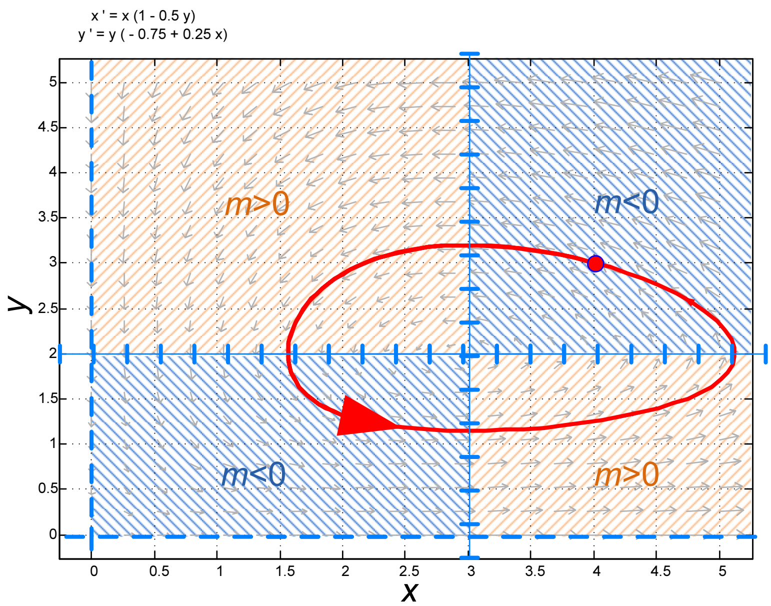
Skicirana područja su na slici 4.

c) *(1 bod)* Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 4$ i $y(0) = 3$ ako se zna da je ravnotežno stanje $x = 3$, $y = 2$ tipa centar.

Potrebno je izračunati nagib trajektorije u početnom uvjetu.

$$m = \frac{3(-0.75+1)}{4(1-1.5)} = \frac{0.75}{-2} = \tan\alpha$$
$$\alpha = \operatorname{atan2}(0.75, -2) = 160^\circ$$

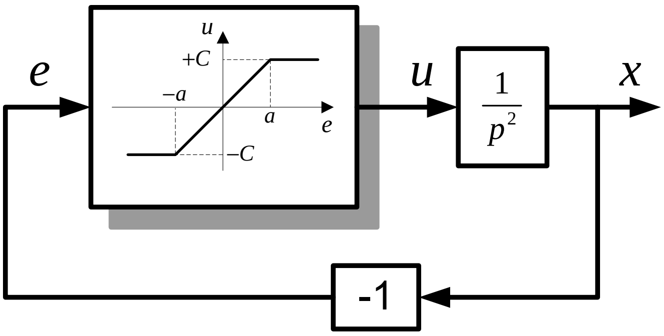
Iz ovoga slijedi da je početni nagib takav da se krivulja kreće suprotno od kazaljke na satu. S obzirom da se radi o ravnotežnoj točki tipa centar, trajektorija je zatvorenog oblika. Rješenje je prikazano slikom 4.



Slika 4: Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib ∞. Narančasto iscrtkana područja su područja s pozitivnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s negativnim nagibom trajektorije.

Zadatak 3

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 5.



Slika 5: Dvopoložajni relej s histerezom.

a) *(4 bod)* Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

$$x = \frac{1}{s^2} y_N \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = y_N$$
$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = y_N$$
$$\frac{dy}{dt} y \frac{dt}{dx} = y_N$$
$$ydy = y_N dx$$
$$y^2 = \int y_N dx + const.$$

I. latica

$$u > a \Rightarrow x < -a \Rightarrow y_N = C$$
$$y^2 = 2Cx + const$$

II. latica

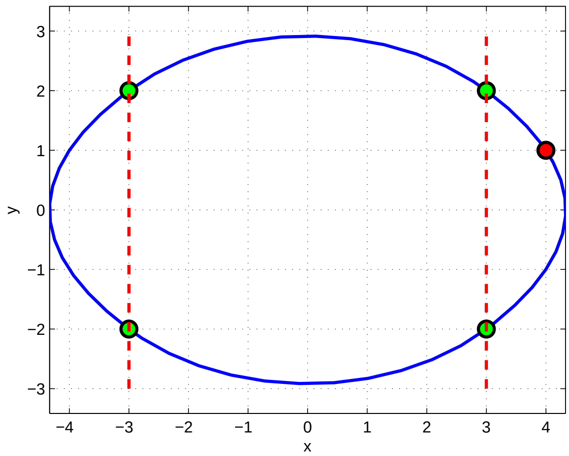
$$u < -a \Rightarrow x > a \Rightarrow y_N = -C$$
$$y^2 = -2Cx + const$$

III. latica

$$|u| < a \Rightarrow \ |x| < a \Rightarrow y_N = \frac{C}{a} u = -\frac{C}{a} x$$
$$y^2 + \frac{C}{a} x^2 = const$$

b) *(3 boda)* Uz parametre sustava $C = 1.5$, $a = 3$ i početne uvjete $x(0) = 4$ i $\dot{x}(0) = 1$, izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini x–$\dot{x}$. *Napomena:* Nije potrebno određivati smjer trajektorije!

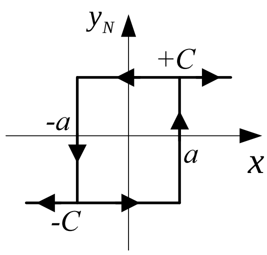
korak	x_0	y_0	latica	const.	jednadžba	$x_{krajnje}$	$y_{krajnje}$
1.	4	1	II.	13	$y^2 = -3x + 13$	3	± 2
2.	3	± 2	III.	8.5	$y^2 + 0.5x^2 = 8.5$	-3	-(± 2)
3.	-3	-(± 2)	I.	13	$y^2 = 3x + 13$	-3	± 2



Slika 6: Trajektorija uz zadatak.

Zadatak 4

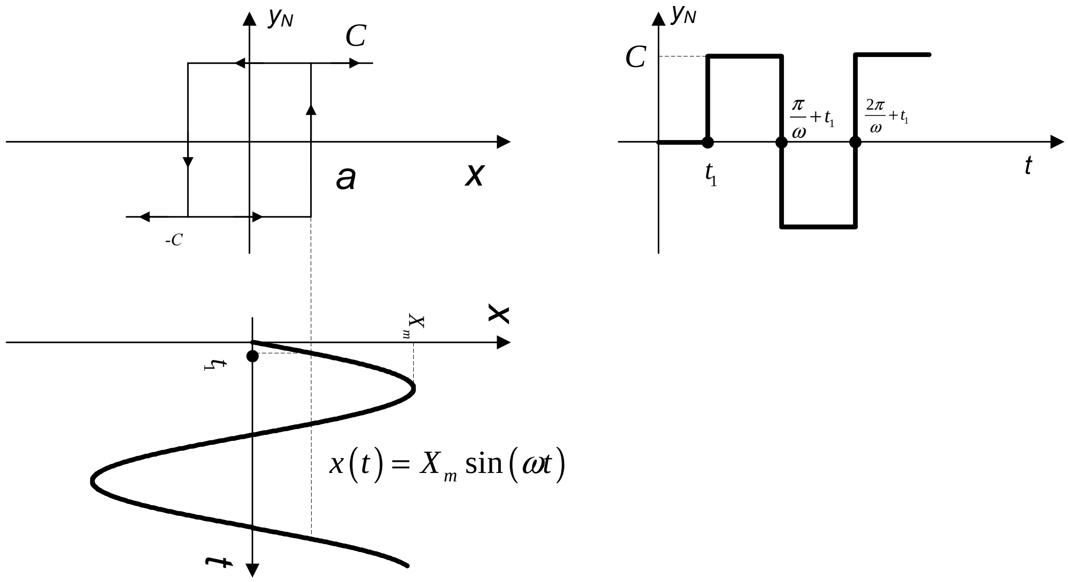
Na slici 7 prikazan je nelinearni element dvopoložajni relej s histerezom. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $x(t) = X_m \sin(\omega t)$.



Slika 7: Dvopoložajni relej s histerezom.

a) *(1 bod)* Koji harmonici se javljaju ma izlazu iz nelinearnog elementa?
Neparni višekratnici osnovnog harmonika.

b) *(1 bod)* Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $y(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke ako je $X_m > a$.



Slika 8: Slika uz rješenje – izlaz iz dvopoložajnog releja s histerezom.

c) *(3 boda)* Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$. Ulazni signal je sinusni, oblika $x = X_m \sin(\omega t)$. U trenutku t_1, iznos ulaznog signala je a, stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin\varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin\frac{a}{X_m}$$

Realni i imaginarni dio opisne funkcije:

$$\begin{aligned}
P_N &= \tfrac{1}{\pi X_m}\int\limits_0^{2\pi} y_N \sin\varphi d\varphi = \tfrac{1}{\pi X_m}\left[\int\limits_{\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} C\sin\varphi d\varphi - \int\limits_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1} C\sin\varphi d\varphi\right] = \\
&= \tfrac{C}{\pi X_m}\left[-\cos(\pi+\varphi_1) + \cos\varphi_a + \cos\varphi_a - \cos(\pi+\varphi_1)\right] = \tfrac{4C}{\pi X_m}\cos\varphi_1 = \\
&= \tfrac{4C}{\pi X_m}\sqrt{1-\left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_N &= \tfrac{1}{\pi X_m}\int\limits_0^{2\pi} y_N \cos\varphi d\varphi = \tfrac{1}{\pi X_m}\left[\int\limits_{\varphi_1}^{\pi+\varphi_1} C\cos\varphi d\varphi - \int\limits_{\pi+\varphi_1}^{2\pi+\varphi_1} C\cos\varphi d\varphi\right] = \\
&= \tfrac{C}{\pi X_m}\left[\sin(\pi+\varphi_1) - \sin\varphi_a - \sin(2\pi+\varphi_a) + \sin(\pi+\varphi_1)\right] = -\tfrac{4C}{\pi X_m}\sin\varphi_1 = \\
&= -\tfrac{4Ca}{\pi X_m^2}
\end{aligned}$$

d) *(1 bod)* Koliko je fazno zaostajanje osnovnog harmonika na izlazu nelinearnog elementa u odnosu na signal na ulazu?

$$\varphi = \mathrm{atan}\frac{Q}{P} = \mathrm{atan}\left(-\frac{a}{\sqrt{X_m^2-a^2}}\right)$$