Drugi međuispit

22. svibnja 2009.

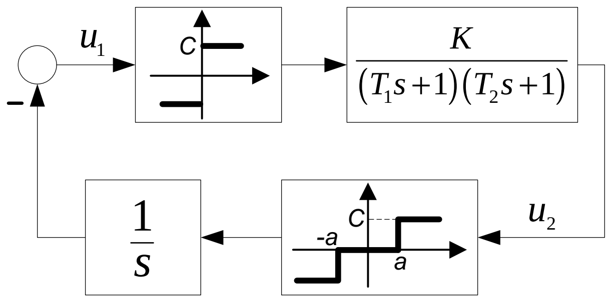
Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (10 bodova)

Sustav prikazan Slikom 1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj. $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ i $u_2(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$. Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija na ulazu u dvopoložajni relej (A i ω). Zadano je: $K = 2$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $a = 0.1$ i $C = 0.7$.

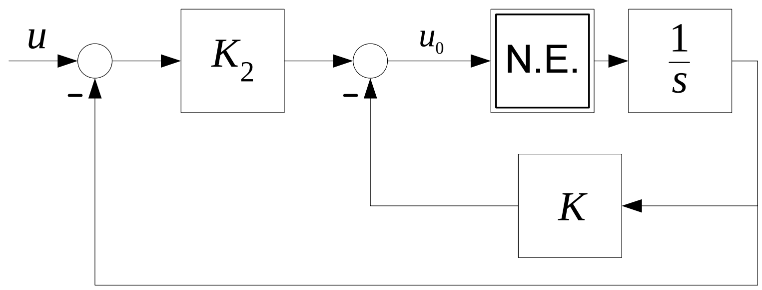
Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{A}\right)^2}$.



Slika 1: Zatvoreni krug upravljanja s dva nelinearna elementa.

2. zadatak (9 bodova)

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan Slikom 2 gdje je N.E. nelinearni element. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika $u(t) = U_m \sin(t)$ zbog čega je sustav uveden u prinudne oscilacije koje na ulazu u nelinearni element imaju oblik $u_0(t) = A\sin(t + \varphi)$.



Slika 2: Zatvoreni nelinearni krug upravljanja s pobudnim harmoničkim signalom.

a) Odredite karakterističnu jednadžbu sustava ako opisna funkcija nelinearnog elementa dobivena harmoničkom linearizacijom ima oblik $G_N(A) = P_N(A) + jQ_N(A)$.

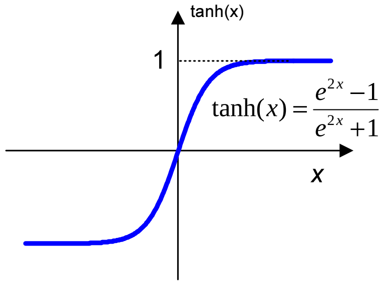
b) Odredite za koju minimalnu vrijednost amplitude pobudnog signala dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je nelinearni element dvopoložajni relej s opisnom funkcijom $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$. Zadano je $K_2 = 1.5$, $K = 1$ i $C = 0.7$.

3. zadatak (4 boda)

Proces kojega sačinjavaju dva pola se nalazi u zatvorenom krugu upravljanja s jednoznačnim nelinearnim elementom. Može li u ovakvom sustavu doći do vlastitih oscilacija? Precizno obrazložite odgovor korištenjem metode Goldfarba.

4. zadatak (3 boda)

Jednadžbom i Slikom 3 je zadana statička karakteristika nelinearnog elementa. Odredite najmanju klasu nelinearnosti kojoj pripada zadani nelinearni element.



Slika 3: Karakteristika nelinearnog elementa.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Sustav prikazan Slikom 1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj. $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ i $u_2(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$. Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija na ulazu u dvopoložajni relej (A i ω). Zadano je: $K = 2$, $T_1 = 1$, $T_2 = 2$, $x_a = 0.1$ i $C = 0.7$.

Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{A}\right)^2}$.

Karakteristična jednadžba zatvorenog kruga upravljanja može se napisati kao:

$$\begin{array}{l} 1 + G_{N1}(A)\frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)}G_{N2}(B)\frac{1}{s} = 0 \\ T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2)s^2 + s + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) = 0 \end{array}.$$

Supstitucijom $s = j\omega$ dobije se

$$-jT_1T_2\omega^3 - (T_1 + T_2)\omega^2 + j\omega + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) = 0.$$

Iz imaginarnog dijela

$$-T_1T_2\omega^3 + \omega = 0$$

direktno slijedi frekvencija vlastitih oscilacija:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1T_2}} = 0.707$$

Iz realnog dijela

$$-(T_1 + T_2)\omega^2 + KG_{N1}(A)G_{N2}(B) = 0$$

ćemo dobiti traženu amplitudu A.

Opisne funkcije su

$$\begin{array}{l} G_{N1}(A) = \frac{4C}{A\pi} \\ G_{N2}(B) = \frac{4C}{B\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{x_a}{B}\right)^2} \end{array}.$$

Sada je potrebno izraziti amplitudu B pomoću amplitude A tako da ostane jedna jednadžba s jednom nepoznanicom.

$$B = |G_P(j\omega)|\,G_{N1}(A)\,A = \frac{K}{\sqrt{(T_1\omega)^2 + 1}\sqrt{(T_2\omega)^2 + 1}}G_{N1}(A)\,A$$

$$B = \frac{K\sqrt{T_1T_2}}{T_1 + T_2}G_{N1}(A)\,A$$

$$G_{N2}(B) = \frac{4C(T_1 + T_2)}{\pi G_{N1}(A)AK\sqrt{T_1T_2}}\sqrt{1 - \left(\frac{x_a(T_1 + T_2)}{K\sqrt{T_1T_2}}\frac{1}{G_{N1}(A)A}\right)^2} = \frac{T_1 + T_2}{K\sqrt{T_1T_2}}\sqrt{1 - \left(\underbrace{\frac{x_a(T_1 + T_2)\pi}{4CK\sqrt{T_1T_2}}}_{\alpha}\right)^2}$$

Iz realnog dijela sada slijedi:

$$\frac{T_1 + T_2}{T_1T_2} = K\frac{4C}{A\pi}\frac{T_1 + T_2}{K\sqrt{T_1T_2}}\sqrt{1 - \alpha^2}$$

I na kraju

$$A = \frac{4C\sqrt{T_1T_2}}{\pi}\sqrt{1 - \alpha^2}$$

$$\alpha = 0.119005$$

i

$$A = 1.2515$$

Zadatak 2

Zadan je nelinearni krug upravljanja prikazan Slikom 2 gdje je N.E. nelinearni element. Na ulaz u sustav je doveden harmonički signal oblika $u(t) = U_m \sin(t)$ zbog čega je sustav uveden u prinudne oscilacije koje na ulazu u nelinearni element imaju oblik $u_0(t) = A\sin(t+\varphi)$.

a) Odredite karakterističnu jednadžbu sustava ako opisna funkcija nelinearnog elementa dobivena harmoničkom linearizacijom ima oblik $G_N(A) = P_N(A) + jQ_N(A)$.

$$u_0 = K_2(u-y) - Ky = K_2 u - (K_2+K)\,y$$
$$y = \tfrac{1}{s} G_N(A)\,u_0$$

daju

$$u_0\left[s + (K_2+K)\,G_N(A)\right] = K_2 s u$$

Za prinudne oscilacije vrijedi

$$u_0 = A\sin(\omega_u t + \varphi)$$

i onda se ulazni signal može pisati kao

$$u = U_m \sin(\omega_u t) = U_m \sin(\omega_u t + \varphi - \varphi) = U_m \cos\varphi \sin(\omega_u t + \varphi) - U_m \sin\varphi \cos(\omega_u t + \varphi)$$
$$u = \tfrac{U_m}{A}\left(\cos\varphi - \tfrac{\sin\varphi}{\omega_u} s\right) u_0$$

Karakteristična jednadžba je onda

$$s + (K_2+K)\,G_N(A) = K_2 \frac{U_m}{A} s \left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\omega_u} s\right)$$

Frekvencija pobudnog signala je $\omega_u = 1$ te supstitucijom $s = j\omega_u$ dobije se

$$j\omega_u + (K_2+K)\left[P_N(A) + jQ_N(A)\right] = K_2 \frac{U_m}{A}\omega_u\,(j\cos\varphi + \sin\varphi)$$

Realni dio je:

$$\sin\varphi = \frac{K+K_2}{K_2\omega}\frac{A}{U_m} P_N(A)$$

Imaginarni dio je:

$$\cos\varphi = \frac{\omega + (K+K_2)\,Q_N(A)}{K_2\omega}\frac{A}{U_m}$$

b) Odredite za koju vrijednost amplitude pobudnog signala dolazi do pojave prinudnih oscilacija ako je nelinearni element dvopoložajni relej s opisnom funkcijom $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}$. Zadano je $K_2 = 1.5$, $K = 1$ i $C = 0.7$.

Uvrstimo $Q_N = 0$. Budući da vrijedi $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$, iz realnog i imaginarnog dijela karakteristične jednadžbe dobije se

$$\sin\varphi = \frac{K+K_2}{K_2\omega}\frac{1}{U_m}\frac{4C}{\pi}$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{K_2}\frac{A}{U_m}$$

$$U_m = \sqrt{\left(\frac{A}{K_2}\right)^2 + \left(\frac{4C}{\pi}\frac{K+K_2}{K_2\omega}\right)^2}$$

$$A = K_2\sqrt{U_m^2 - \left(\frac{4C}{\pi}\frac{K+K_2}{K_2\omega}\right)^2}$$

Da bi postojalo rješenje, izraz pod korijenom mora biti veći od 0.

$$U_m > \frac{4C}{\pi}\frac{K+K_2}{K_2\omega} = 1.485$$

Zadatak 3

Proces kojega sačinjavaju dva pola se nalazi u zatvorenom krugu upravljanja s jednoznačnim nelinearnim elementom. Može li u ovakvom sustavu doći do vlastitih oscilacija? Precizno obrazložite odgovor korištenjem metode Goldfarba.
Nyquistov dijagram procesa s dva pola prolazi kroz IV. i III. kvadrant. Jednoznačni nelinearni element ima samo realni dio, tako da negativni inverz se nalazi isključivo na realnoj osi u Nyquistovoj ravnini. Zaključak je da nikada neće doći do presjecišta između dvije krivulje.

Zadatak 4

Jednadžbom i Slikom 3 je zadana statička karakteristika nelinearnog elementa. Odredite najmanju klasu nelinearnosti kojoj pripada zadani nelinearni element.
Samo je potrebno naći derivaciju statičke karakteristike u ishodištu.

$$\left.\frac{d}{dx}\tanh(x)\right|_{x=0} = \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)\right|_{x=0} = 1$$