Drugi međuispit

19. svibnja 2010.

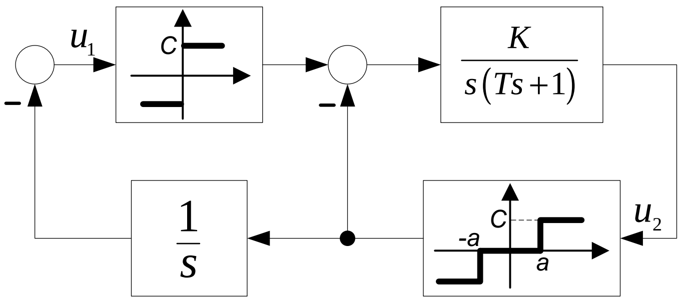
Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (9 bodova)

Sustav prikazan Slikom 1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj. $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ i $u_2(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$. Zadano je: $K = 0.1$, $T = 2$, $a = 0.1$ i $C = 0.7$. Odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija A, B, ω i φ.

Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$.



Slika 1: Nelinearni sustav upravljanja uz Zadatak 1.

2. zadatak (8 bodova)

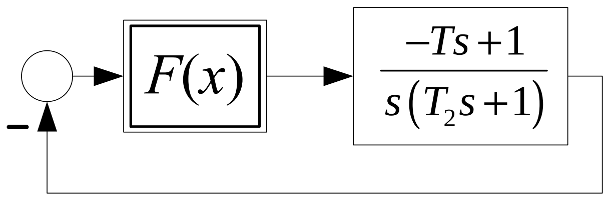
Zadan je sustav upravljanja prikazan Slikom 2 gdje su $T > 0$ i $T_2 > 0$.

a) *(1 bod)* Neka je $F(x) = K \cdot x$. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja u ovisnosti o parametru K.

b) *(5 bodova)* Neka je $F(x) = K \cdot x^3$. Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija te odredite njihovu stabilnost.

c) *(2 boda)* Nacrtajte na istoj slici područje stabilnosti u ravnini X_m–K za slučajeve iz a) i b) dijela zadatka.

Napomena: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.



Slika 2: Nelinearni sustav upravljanja uz Zadatak 2.

3. zadatak (6 bodova)

Zadan je zatvoreni krug upravljanja s tropoložajnim relejem i procesom s dva pola, jednim integratorom i bez nula. Korištenjem metode Goldfarba odredite koliko mora biti amplitudno osiguranje sustava da NE dođe do pojave vlastitih oscilacija. Dobiveni rezultat izrazite pomoću parametara tropoložajnog releja (a i C).
Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je dana u Zadatku 1.

4. zadatak (3 boda)

Zatvoreni krug upravljanja sastoji se od linearnog procesa $G(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ i nelinearnog elementa $G_N(X_m) = P_N(X_m) + jQ(X_m)$. Na ulaz zatvorenog kruga upravljanja narinut je signal oblika

$$f(t) = F_v \sin(\omega_v t).$$

a) *(1 bod)* Napišite jednadžbu koja je pogodna za grafičko određivanje prinudnih oscilacija oblika $x(t) = X_m \sin(\omega_v t + \varphi)$ (izvod nije potreban).

b) *(2 boda)* Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Sustav prikazan Slikom 1 se nalazi u režimu vlastitih oscilacija, tj. $u_1(t) = A\sin(\omega t)$ i $u_2(t) = B\sin(\omega t + \varphi)$. Zadano je: $K = 0.1$, $T = 2$, $a = 0.1$ i $C = 0.7$. Odredite nepoznate parametre vlastitih oscilacija A, B, ω i φ.

Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je $G_N(A) = \frac{4C}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$.

Dvopoložajni relej ima opisnu funkciju

$$G_{N1}(A) = \frac{4C}{\pi A}$$

a tropoložajni relej

$$G_{N2}(B) = \frac{4C}{\pi B}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{B}\right)^2}.$$

Prvo je potrebno doći do karaktersitične jednadžbe zatvorenog kruga. Mogu se napisati sljedeće jednadžbe:

$$u_1 = -\frac{1}{s}G_{N2}(B)\,u_2 \tag{1}$$

$$u_2 = \frac{K}{s(Ts+1)}\left[G_{N1}(A)\,u_1 - G_{N2}(B)\,u_2\right] \tag{2}$$

Uvrštavanjem (1) u (2) i kraćenjem u_2 dobije se karakteristična jednadžba zatvorenog kruga:

$$\boxed{Ts^3 + s^2 + KG_{N2}(B)\,s + KG_{N1}(A)\,G_{N2}(B) = 0.} \tag{3}$$

Uvrštavanjem $s = j\omega$ dobije se:

- imaginarni dio $\omega^2 = \frac{K}{T}G_{N2}(B)$ i
- realni dio $\omega^2 = KG_{N1}(A)\,G_{N2}(B)$

Kombinacijom ove dvije jednadžbe dobije se

$$G_{N1}(A) = \frac{1}{T} \Rightarrow \boxed{A = \frac{4CT}{\pi} = 1.7825}.$$

Veza između amplitude A i B se može najjednostavnije naći iz (1) kako slijedi:

$$|u_1| = \left|\frac{1}{s}G_{N2}(B)\right||u_2|$$

$$A = \frac{1}{\omega}G_{N2}(B)\,B = \frac{1}{\omega}\frac{4C}{\pi}\sqrt{1 - \left(\frac{a}{B}\right)^2}$$

Uvrštavanjem poznatog A i ω iz imaginarnog dijela karakteristične jednadžbe dobije se

$$\boxed{B = \sqrt{\left(\frac{4CTK}{\pi}\right)^2 + a^2} = 0.2044}.$$

Frekvencija oscilacija se jednostavno dobije iz imaginarnog dijela karakteristične jednadžbe:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{T}G_{N2}(B)}$$

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{T^2 + \left(\frac{\pi a}{4CK}\right)^2}} = 0.4361}.$$

Kut φ koji se javlja između u_1 i u_2 se odredi opet iz (1) kao

$$\angle u_1 = \left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) + \angle u_2$$

$$\angle u_2 = \angle u_1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}},$$

što je logično budući da su ta dva signala vezana samo preko integratora (i negativnog predznaka).

Zadatak 2

Zadan je sustav upravljanja prikazan Slikom 2 gdje su $T > 0$ i $T_2 > 0$.

a) *(1 bod)* Neka je $F(x) = K \cdot x$. Odredite područje stabilnosti zatvorenog kruga upravljanja u ovisnosti o parametru K.

b) *(5 bodova)* Neka je $F(x) = K \cdot x^3$. Odredite amplitudu i frekvenciju vlastitih oscilacija te odredite njihovu stabilnost.

c) *(2 boda)* Nacrtajte na istoj slici područje stabilnosti u ravnini X_m–K za slučajeve iz a) i b) dijela zadatka.

Napomena: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

a) U ovom slučaju imamo linearan sustav upravljanja gdje je $F(x)$ zapravo pojačanje K. Zatvoreni krug upravljanja je onda:

$$G_{cl}(s) = \frac{G_o}{1+G_o} = \frac{-Ts+1}{\frac{T_2}{K}s^2 + \frac{1-KT}{K}s + 1}$$

Za stabilnost je dovoljno osigurati da su svi koeficijenti karakteristične jednadžbe pozitivni, iz čega slijedi

$$\boxed{K \in \left(0, \frac{1}{T}\right)}.$$

b) Odredimo prvo opisnu funkciju kubne funkcije:

$$\begin{aligned}
P_N &= \frac{1}{\pi X_m}\int_0^{2\pi} K(X_m \sin\varphi)^3 \sin\varphi d\varphi = \\
&= \frac{KX_m^2}{\pi}\int_0^{2\pi} (\sin\varphi)^4 d\varphi = \frac{KX_m^2}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)^4 d\varphi = \\
&= \frac{KX_m^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos 2\varphi + (\cos 2\varphi)^2 d\varphi = \frac{KX_m^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} 2 - 2\cos 2\varphi - (\sin 2\varphi)^2 d\varphi = \\
&= \frac{KX_m^2}{4\pi}\int_0^{2\pi} 2 - 2\cos 2\varphi - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi d\varphi = \\
&= \boxed{\frac{3}{4}KX_m^2}
\end{aligned}$$

Sada jednostavno određujemo karakterističnu jednadžbu budući da je zatvoreni krug klasičnog oblika:

$$1 + G_N(X_m)\,G_o(j\omega) = 0$$
$$T_2(j\omega)^2 + (j\omega) + G_N(X_m)(-Tj\omega + 1) = 0$$
$$\left(G_N - \omega^2 T_2\right) + j(\omega - \omega T G_N) = 0$$

- imaginarni dio $G_N = \frac{1}{T}$ i
- realni dio $\omega = \sqrt{\frac{G_N}{T_2}}$.

Iz imaginarnog dijela odmah slijedi amplituda vlastitih oscilacija:

$$\boxed{X_m = \frac{2}{\sqrt{3T}}\frac{1}{\sqrt{K}}}.$$

Uvrštavanjem ove amplitude u realni dio dobije se frekvencija vlastitih oscilacija:

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{TT_2}}}.$$

Za stabilnost treba provjeriti uvjet

$$\frac{\partial R}{\partial X_m}\frac{\partial I}{\partial \omega} - \frac{\partial I}{\partial X_m}\frac{\partial R}{\partial \omega} > 0$$

gdje su

$$R = \frac{3}{4}KX_m^2 - \omega^2 T_2$$

i

$$I = \omega\left(1 - \frac{3}{4}KTX_m^2\right)$$

realni i imaginarni djelovi karakteristične jednadžbe. Slijedi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial X_m} &= \frac{3}{2}KX_m = \sqrt{\frac{3K}{T}}\\
\frac{\partial I}{\partial \omega} &= 1 - \frac{3}{4}KTX_m^2 = 0\\
\frac{\partial I}{\partial X_m} &= -\frac{3}{2}KTX_m = -\sqrt{3KT}\\
\frac{\partial R}{\partial \omega} &= -2\omega T_2 = -\sqrt{\frac{T_2}{T}}
\end{aligned}$$

odnosno $-\sqrt{3KT_2} > 0$ što nije istina. Zaključak je da vlastite oscilacije $\boxed{\text{nisu stabilne}}$.

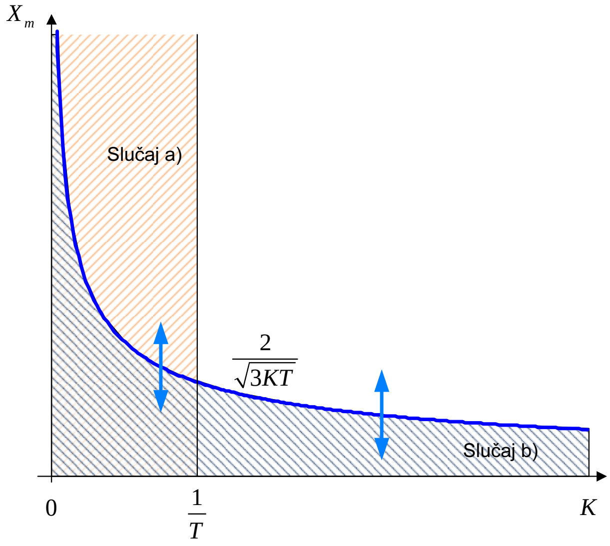
c)

Zadatak 3

Zadan je zatvoreni krug upravljanja s tropoložajnim relejem i procesom s dva pola, jednim integratorom i bez nula. Korištenjem metode Goldfarba odredite koliko mora biti amplitudno osiguranje sustava da NE dođe do pojave vlastitih oscilacija. Dobiveni rezultat izrazite pomoću parametara tropoložajnog releja (a i C).
Napomena: Opisna funkcija tropoložajnog releja je dana u Zadatku 1.

Goldfarbova metoda se svodi na korištenje relacije

$$-\frac{1}{G_N(X_m)} = G_P(j\omega)$$



Slika 3: Rješenje uz Zadatak 2c).

na način da se lijeva i desna strana zasebno nacrtaju. Presjecište između ove dvije krivulje daje točku vlastitih oscilacija (stabilnih ili nestabilnih).

Opisna funkcija tropoložajnog releja ima samo realnu komponentu, tako da i njezin negativni inverz ima samo realnu komponentu. Određivanjem ekstrema (negativnog) inverza može se odrediti koji dio negativne realne osi zauzima negativni inverz opisne funkcije:

$$\frac{1}{G_N(X_m)} = \frac{\pi}{4C}\frac{X_m^2}{\sqrt{X_m^2 - a^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial X_m}\frac{1}{G_N(X_m)} = 0 \Rightarrow X_m = a\sqrt{2}$$

$$\left.\frac{1}{G_N(X_m)}\right|_{X_m = a\sqrt{2}} = \frac{\pi a}{2C}$$

Dakle lijeva strana jednadžbe zauzima realni dio osi na području $\left(-\infty, -\frac{\pi a}{2C}\right)$.

Desna strana je Nyquistov dijagram procesa. Podatak da proces ima dva pola, integrator i da nema nula nam služi tome da zaključimo da Nyquistov dijagram procesa (otvorenog kruga bez nelinearnog elementa) siječe realnu os jednom i to u točki koja je udaljena od ishodišta $\frac{1}{A.O.}$ gdje je $A.O.$ amplitudno osiguranje. Budući da presjeka ne smije biti slijedi:

$$\frac{1}{A.O.} < \frac{\pi a}{2C}$$

odnosno

$$\boxed{A.O. > \frac{2C}{\pi a}}.$$

Zadatak 4

Zatvoreni krug upravljanja sastoji se od linearnog procesa $G(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ i nelinearnog elementa $G_N(X_m) = P_N(X_m) + jQ(X_m)$. Na ulaz zatvorenog kruga upravljanja narinut je signal oblika

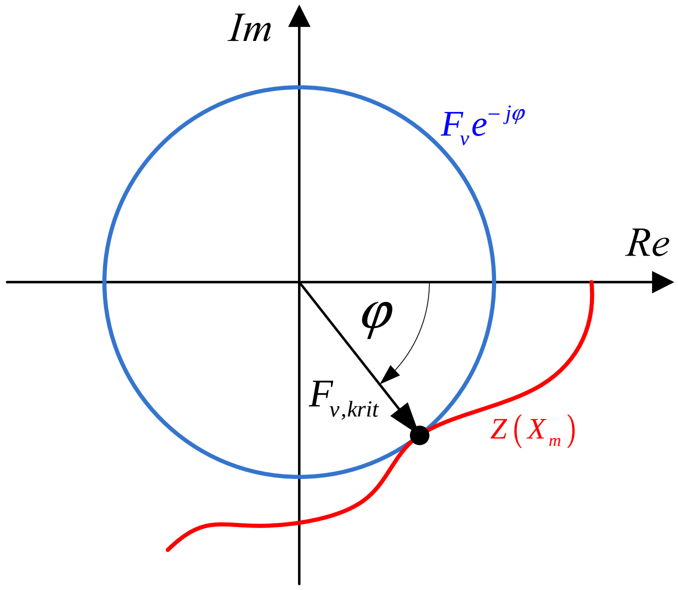
$$f(t) = F_v \sin(\omega_v t).$$

a) *(1 bod)* Napišite jednadžbu koja je pogodna za grafičko određivanje prinudnih oscilacija oblika $x(t) = X_m \sin(\omega_v t + \varphi)$ (izvod nije potreban).

b) *(2 boda)* Skicirajte krivulje za grafičko određivanje prinudnih oscilacija u slučaju kada postoji kritična vrijednost $F_{v,krit} > 0$ za koju dolazi do pojave vlastitih oscilacija. Na slici treba precizno označiti pojedine krivulje, $F_{v,krit}$ i kut φ.

a)

$$\underbrace{X_m \frac{A(j\omega_v) + B(j\omega_v)\left[P_N(X_m) + jQ_N(X_m)\right]}{A(j\omega_v)}}_{Z(X_m)} = F_v e^{-j\varphi}$$



Slika 4: Rješenje uz Zadatak 4c).

b)