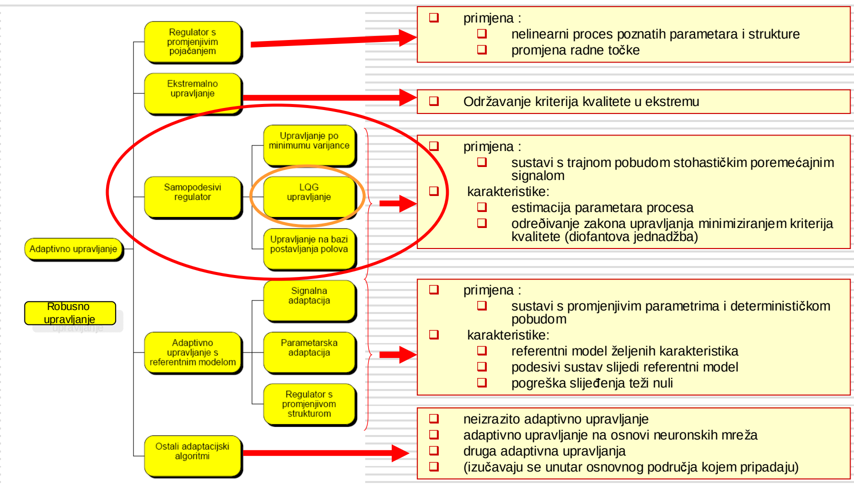
Adaptivno upravljanje

Samopodesivi regulator s LQG upravljanjem

prof. dr. sc. Željko Ban

e-mail: *zeljko.ban@fer.hr*

Podjela adaptivnog upravljanja

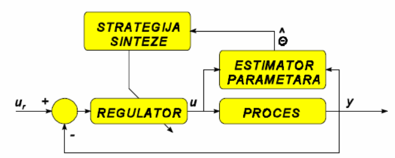


Adaptivno upravljanje na osnovi

linearnog kvadratičnog optimalnog upravljanja (LQG)

- LQG upravljanje
  - *Linear Quadratic Gaussian*
- Zasniva se na minimizaciji matematičkog očekivanja funckije cilja

$$\boxed{I_K = E\left[J_k\right]}$$



  - Funkcija cilja

$$\boxed{J_K = \left[Py(k+d) - Ku_r(k)\right]^2 + \left[Qu(k)\right]^2}$$

- gdje su

$$P\left(q^{-1}\right) = 1 + p_1 q^{-1} + \ldots + p_{np} q^{-np}$$
$$Q\left(q^{-1}\right) = q_0 + q_1 q^{-1} + \ldots + q_{nq} q^{-nq}$$
$$K\left(q^{-1}\right) = k_0 + k_1 q^{-1} + \ldots + k_{nk} q^{-nk}$$

Adaptivno upravljanje na osnovi

linearnog kvadratičnog optimalnog upravljanja

Funkcija cilja $\boxed{J_K = \left[Py(k+d) - ku_r(k)\right]^2 + \left[Qu(k)\right]^2}$

- Željeno ponašanje sustava ostvaruje se odabirom težinskih polinoma
  - Mali izlazni signal
    - Parametri: $\boxed{P = 1;\quad K = 0;\quad Q = q_0 = \sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad J_k = y^2(k+d) + \lambda u^2(k)}$
  - Male promjene upravljačkog signala
    - Parametri $\boxed{P = 1;\quad K = 0;\quad Q = q_0\left(1 - q^{-1}\right) \quad \Rightarrow \quad J_k = y^2(k+d) + q_0\left[u(k) - u(k-1)\right]^2}$
  - Slijedni sustav
    - Parametri $\boxed{P = K = 1;\quad Q = q_0 = \sqrt{\lambda} \quad \Rightarrow \quad J_k = \left[y(k+d) - u_r(k)\right]^2 + \lambda u^2(k)}$
      - izlazni signal prati zakašnjeli referentni signal
  - Sustav za slijeđenje modela (model following system)
    - Parametri Q=0
      - K i P su polinomi brojnika i nazivnika referentnog (željenog) modela
  - Sustav po minimumu varijance
    - Parametri: P=1; Q=0; K=0 $\boxed{\Rightarrow J_k = y^2(k+d)}$

LQG problem

- Postupak
  - uz poznate P, Q, K, $u_r(k)$ i ARMAX model
    - (koeficijenti polinoma A, B, C i kašnjenje d)
    - traži se kauzalan algoritam
      - u(k)=f[y(k), y(k-1), …, u(k-1), u(k-2), …]
  - Određivanje algoritma
    - nije dozvoljeno diferencirati I_k po u(k) kod traženja optimuma
      - jer y(k+d) ovisi o u(k)

LQG problem

Predikcija izlazne varijable rastavlja se na dvije ortogonalne komponente procjenu predikcije i pogrešku predikcije – (*definirane u različitim vremenskim trenucima*)

$$y(k+d) = \hat{y}(k+d\,|\,k) + \tilde{y}(k+d\,|\,k)$$

gdje je optimalni d-koračni prediktor dan izrazom:

$$\hat{y}(k+d\,|\,k) = \frac{S_d(q^{-1})}{C(q^{-1})}y(k) + \frac{B(q^{-1})R_d^{'}(q^{-1})}{C(q^{-1})}u(k)$$

greška predikcije:

$$\tilde{y}(k+d\,|\,k) = R_d^{'}(q^{-1})e(k+d)$$

Polinomi R'_d i S_d dobiveni su dijeljenjem polinoma C s polinomom A u d koraka, tj. dok se u ostatku dijeljenja ne dobije q^{-d} faktor. Određeni su Diophantovom jednadžbom

$$\boxed{A(q^{-1})R_d^{'}(q^{-1}) + q^{-d}S(q^{-1}) = C(q^{-1})}$$

Optimalni prediktor za y(k+j), j<d

izražavanje signala y(k+j) pomoću predikcije

$$y(k+j) = \hat{y}(k+j\,|\,k) + \tilde{y}(k+j\,|\,k)$$

LQG problem

Za j<0 y(k+j) je dio skupa poznatih podataka do trenutka k i vrijedi

$$y(k+j) = \hat{y}(k+j\,|\,k) \qquad \forall j < 0$$

za j=d vrijedi:

$$\hat{y}(k+d\,|\,k) = \frac{S_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k) + \frac{B(q^{-1})R'_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k) \qquad \tilde{y}(k+d\,|\,k) = R'_d(q^{-1})e(k+d)$$

za j<d se ne može generalizirati

$$\hat{y}(k+j\,|\,k) = \frac{S_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} y(k-d+j) + \frac{B(q^{-1})R'_d(q^{-1})}{C(q^{-1})} u(k-d+j)$$

zbog zanemarivanja dostupnih podataka y(k-d+j+1), ..., y(k)

Nije optimalna predikcija.

Potrebno podijeliti polinome $C(q^{-1})$ i $A(q^{-1})$ u j koraka da se dobije kvocijent $R_j'(q^{-1})$ i ostatak $S_j(q^{-1})$

$$AR'_j + q^{-j}S_j = C$$

gdje su:

$$R'_j(q^{-1}) = 1 + r'_1 q^{-1} + \ldots + r'_{j-1} q^{-(j-1)}$$

$$S_j(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + \ldots + s_{n-1} q^{-(n-1)}$$

Polinomi R i S određuju se za svaki j u rasponu d-np < j < d

LQG problem

Množenjem j koračne prediktivne forma modela (ARMAX)

$$\boxed{A(q^{-1})y(k) = q^{-j}B(q^{-1})u(k) + C(q^{-1})e(k)}$$

polinomom R'$_j$ dobije se: $\boxed{AR'_j y(k+j) = BR'_j u(k-d+j) + R'_j Ce(k+j)}$

uz Diophantovu jednadžbu: $AR'_j + q^{-j}S_j = C$

Ortogonalne komponente

dobije se:

$$y(k+j) = \underbrace{\frac{S_j}{C} y(k) + \frac{BR'_j}{C} u(k-d+j)}_{\substack{\text{ovisi o} \\ e(k),\ e(k-1),\ \ldots}} + \underbrace{R'_j e(k+j)}_{\substack{\text{ovisi o} \\ e(k+1),\ e(k+2),\ \ldots}}$$

Slično kao kod MV upravljanja dobije se:

$$\hat{y}(k+j\,|\,k) = \frac{S_j}{C} y(k) + \frac{BR'_j}{C} u(k-d+j), \qquad 0 < j < d$$

Greška predikcije je:

$$\boxed{\tilde{y}(k+j\,|\,k) = R'_j(q^{-1})e(k+j)}$$

LQG problem

Prediktor j koračni $\hat{y}(k+j|k)=\frac{S_j}{C}y(k)+\frac{BR_j^{'}}{C}u(k-d+j), \quad 0<j<d$

Greška predikcije je: $\tilde{y}(k+j|k)=R_j^{'}(q^{-1})e(k+j)$

Varijanca greške predikcije $\boxed{E\left(\tilde{y}^2(k+j|k)\right)=\left(1+r_1^{'2}+\ldots+r_{j-1}^{'\,2}\right)\sigma^2}$

Optimalni prediktor koristi sve dostupne signale

Uzimajući kriterijsku funkciju $\boxed{J_K=\left[Py(k+d)-Ku_r(k)\right]^2+\left[Qu(k)\right]^2}$

i ortogonalnu dekompoziciju $y(k+j)=\hat{y}(k+j|k)+\tilde{y}(k+j|k)$

dobije se funkcija cilja $\boxed{I_K=E\left\{\left[P\hat{y}(k+d|k)-P\tilde{y}(k+d|k)-Ku_r(k)\right]^2+\left[Qu(k)\right]^2\right\}}$

Svaka greška $\tilde{y}(k+j|k)$ ovisi o e(k+1), e(k+2), ... pa je $P(q^{-1})\tilde{y}(k+j|k)$ ortogonalan na sve ostale komponente (*koje su determinističke*), pa funkcija cilja poprima oblik:

$$\boxed{I_K=\left[P\hat{y}(k+d|k)-Ku_r(k)\right]^2+\left[Qu(k)\right]^2+E\left[P\tilde{y}(k+d|k)\right]^2}$$

LQG problem

Ortogonalnost prediktivne forme y(k+d) omogućila je rastavljanje funkcije cilja na stohastičku komponentu nezavisnu od u(k) i determinističku komponentu

Funkcija cilja $\boxed{I_K=\left[P\hat{y}(k+d|k)-Ku_r(k)\right]^2+\left[Qu(k)\right]^2+E\left[P\tilde{y}(k+d|k)\right]^2}$

Deterministička komponenta

Stohastička komponenta

Komponenta $\hat{y}(k+d|k)$ ovisi o u(k)

Komponenta $\hat{y}(k+j|k)$ za $j<d$ ne ovisi o u(k)
(ovisi samo o ranijim signalima upravljanja)

Vrijedi
$$\frac{\partial y(k+d|k)}{\partial u(k)}=\frac{B(0)R_d^{'}(0)}{C(0)}=b_0$$

$$\frac{\partial}{\partial u(k)}\left[Qu(k)\right]^2=\frac{\partial}{\partial u(k)}\left[q_0u(k)+q_1u(k-1)+\ldots+q_{nq}u(k-nq)\right]^2=2q_0Qu(k)$$

LQG regulator

Derivacija funkcije cilja ima oblik

$$\frac{\partial I_K}{\partial u(k)} = 2b_0\left[P\hat{y}(k+d\,|\,k) - Ku_r(k)\right] + 2q_0 Qu(k) = 0$$

Optimalni zakon upravljanja određen je sa

$$P(q^{-1})y(k+d\,|\,k) + \frac{q_0}{b_0}Q(q^{-1})u(k) - K(q^{-1})u_r(k) = 0$$

Uz polinom P oblika

$$P(q^{-1}) = 1 + p_1 q^{-1} + \ldots + p_{np} q^{-np}$$

zakon upravljanja poprima oblika

$$\sum_{j=0}^{np} p_j y(k+d-j\,|\,k) + \frac{q_0}{b_0}Q(q^{-1})u(k) - K(q^{-1})u_r(k) = 0$$

LQG regulator

uzimajući u obzir da je $\hat{y}(k+j\,|\,k) = \frac{S_j}{C}y(k) + \frac{BR_j^{'}}{C}u(k-d+j), \quad 0<j<d$

zakon upravljanja $\sum_{j=0}^{np} p_j y(k+d-j\,|\,k) + \frac{q_0}{b_0}Q(q^{-1})u(k) - K(q^{-1})u_r(k) = 0$

poprima oblika

$$\sum_{j=0}^{np} p_j S_{d-j} y(k) + \sum_{j=0}^{np} p_j BR_{d-j}^{'} u(k-j) + \frac{q_0}{b_0}CQ(q^{-1})u(k) - CK(q^{-1})u_r(k) = 0$$

Definiranjem da je

$$S(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j S_{d-j}(q^{-1})$$

$$R(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j B(q^{-1})R_{d-j}^{'}(q^{-1})q^{-j}u(k-j) + \frac{1}{b_0}q_0 C(q^{-1})Q(q^{-1})u(k)$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1})K(q^{-1})u_r(k) = t_0 + t_1 q^{-1} + \ldots + t_{nt} q^{-nt}$$

LQG regulator

$$S(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j S_{d-j}(q^{-1})$$

$$R(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j B(q^{-1}) R'_{d-j}(q^{-1}) q^{-j} u(k-j) + \frac{1}{b_0} q_0 C(q^{-1}) Q(q^{-1}) u(k)$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) K(q^{-1}) u_r(k) = t_0 + t_1 q^{-1} + \ldots + t_{nt} q^{-nt}$$

Zakon upravljanja

$$R(q^{-1}) u(k) = T(q^{-1}) u_r(k) - S(q^{-1}) y(k)$$

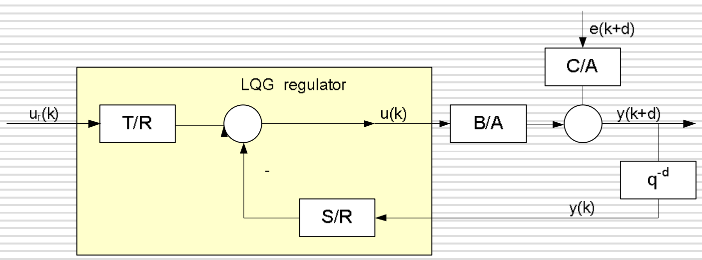
Upravljački signal LQG regulatora ima oblik

$$\boxed{u(k) = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} u_r(k) - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k)}$$

LQG regulator

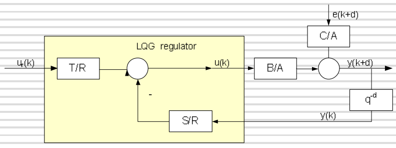
$$\boxed{u(k) = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} u_r(k) - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k)}$$

Blok shema sustava s regulatorom po minimumu varijance



Algoritam LQG regulatora

- Početni podaci
  - izbor polinoma P, K, Q
  - poznati red polinoma na, nb, nc.
- Algoritam
  - Estimacija polinoma A, B, C i kašnjenja procesa d
  - Proračun R_j' i S_j polinoma
    - rješavanje Diophantove jednadžbe za d-np<j<d
  - Proračun S, R i T polinoma
  - Proračun upravljačkog signala u(k)



Diophantova jednadžba

$$AR_j' + q^{-j}S_j = C$$

$$S(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j S_{d-j}(q^{-1})$$

$$R(q^{-1}) = \sum_{j=0}^{np} p_j B(q^{-1}) R_{d-j}'(q^{-1}) q^{-j} u(k-j) + \frac{1}{b_0} q_0 C(q^{-1}) Q(q^{-1}) u(k)$$

$$T(q^{-1}) = C(q^{-1}) K(q^{-1}) u_r(k) = t_0 + t_1 q^{-1} + \ldots + t_{nt} q^{-nt}$$

$$\boxed{u(k) = \frac{T(q^{-1})}{R(q^{-1})} u_r(k) - \frac{S(q^{-1})}{R(q^{-1})} y(k)}$$

Svojstva LQG regulatora

- LQG optimalni regulator
  - dva stupnja slobode
  - Razlika prema MV regulatoru
    - uz komponentu u povratnoj vezi postoji i komponenta u unaprijednoj grani
  - moguće pomicati polove i nule procesa
  - MV regulator se može dobiti LQG postupkom uz
    - P=1; Q=K=0

$$I_K = E\left[Py^2(k+d)\right]$$

$$S(q^{-1}) = S_d(q^{-1}); \qquad R(q^{-1}) = B(q^{-1}) R_d'(q^{-1})$$

zakon upravljanja

$$B(q^{-1}) R_d'(q^{-1}) u(k) = -S_d(q^{-1}) y(k) \Rightarrow \text{MV regulator}$$

Svojstva LQG regulatora

- LQG optimalni regulator
  - dobije se rješavanjem Diophantove jednadžbe

$$AR_j' + q^{-j}S_j = C \qquad R_j'(q^{-1}) = 1 + r_1' q^{-1} + \ldots + r_{j-1}' q^{-(j-1)}$$

$$S_j(q^{-1}) = s_0 + s_1 q^{-1} + \ldots + s_{n-1} q^{-(n-1)}$$

  - dinamika LQG regulatora sadrži implicitni estimator (optimalni prediktor) za dio unutrašnjeg stanja koje se ne pojavljuje direktno na izlazu
    - Diophantovu jednadžbu treba izračunati za j u intervalu d-np<j<d
  - Usporedba s MV
    - za LQG regulator – postupak određivanja Diophantove jednadžbe složeniji
  - Prijenosna funkcija zatvorenog kruga

$$\boxed{\frac{y(k+d)}{u_r(k)} = \frac{BT}{AR + q^{-d}BS}}$$

    - LQG regulator ovisi o izlaznom signalu y(k), referentnom signalu $u_r(k)$ i prethodnim signalima upravljanja u(k-1), u(k-2), ...
    - LQG regulator ne ovisi o unutarnjim stanjima procesa

Svojstva LQG regulatora

- LQG upravljanje
  - prednosti pred MV upravljanjem uz Q>0
    - troši manje energije za upravljanje
    - varijanca izlaznog signala neznatno veća nego kod MV upravljanja

Svojstva adaptivnog upravljanja

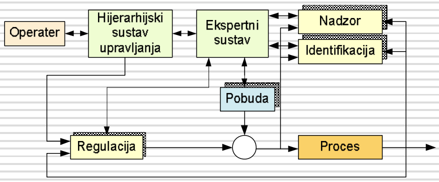
- Kompleksno u usporedbi s ostalim sustavima
- osjetljivo na matematički model procesa
  - (posebno vrijedi za samopodešavajuće regulatore)
- osjetljivo na nemodeliranu dinamiku
- osjetljivo na dobar izbor pobude
- osjetljivo na period diskretizacije
- teže za puštanje u pogon (na postrojenju)

Adaptivni regulator

- Adaptivni regulator sadrži
  - Upravljački zakon s podesivim
    - parametrima ili signalima
    - strukturom regulatora
  - Određenje odziva zatvorenog kruga pomoću
    - referentnog modela
    - specifikacijama u određivanju regulatora
  - Proceduru proračuna pogodnu za računanje u realnom vremenu
  - Osvježavanje parametara (signala) ili strukture zasnovano na mjerenjima
  - Ugrađen zakon upravljanja

Adaptivni regulator

- Prije projektiranja i izvedbe adaptivnog regulatora
  - studija izvodljivosti
  - usporedba adaptivnog regulatora s ostalim regulatorima
- Adaptivni regulator se podešava prema specifičnoj primjeni (postrojenju)
- Upravljački sustav postrojenja
  - Složen sustav upravljanja
    - više regulacijskih petlji
    - međudjelovanje petlji
    - različite vrste upravljanja
    - hijerarhijsko upravljanje
    - sekvencijalno upravljanje vođeno događajima
  - Adaptivni regulator je jedan od upravljačkih algoritama



Kad koristiti adaptivno upravljanje na osnovi samopodešavajućih regulatora?

- Adaptivno upravljanje opravdano je koristiti:
  - kad se proces mijenja nepredvidivo
  - kad su granice promjene parametara procesa nepoznate
  - kad se kašnjenje u procesu ne mijenja
  - kad je matematički model procesa poznatog reda
  - kad matematički model procesa može opisati različite dinamike procesa u normalnom radu

Nepogodnost primjene samopodesivih adaptivnih regulatora

- Adaptivni samopodesivi regulatori (*self tuning adaptive control)* nisu pogodni
  - kad ne može biti osigurana perzistencija pobude
  - kad je perzistentna pobuda opasna za proces
  - kad je upravljački algoritam previše aktivan
    - trošenje aktuatora
  - kad procedura identifikacije nije pouzdana
  - kad može biti narušena stabilnost sustava upravljanja
- Alternativa može biti Robusno upravljanje