

Prvi međuispit iz Diferencijalnih jednadžbi i teorije stabilnosti
30.03.2009.

1. (4 boda)

Zadan je dinamički sustav familijom preslikavanja $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) **(1b)** Napišite definiciju faznog portreta.
- b) **(1b)** Napišite definiciju periodičke orbite.
- c) **(1b)** Napišite definiciju graničnog ciklusa.
- d) **(1b)** Skicirajte fazni portret sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

Da li ima periodičke orbite? Obrazložite.

Da li ima granične cikluse? Obrazložite.

2. (3 boda)

- a) **(1b)** Iskažite teorem egzistencije i jedinstvenosti rješenja diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0,\end{aligned}$$

pri čemu je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{f} : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ vektorsko polje i $\mathbf{x}_0 \in M$.

- b) **(2b)** Skicirajte tok diferencijalne jednadžbe

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= 5y\end{aligned}$$

i provjerite uvjete prethodnog teorema ako je početni uvjet $(x(0), y(0)) = (1, 1)$.

3. (3 boda)

- a) **(1b)** Napišite definiciju disipativnog dinamičkog sustava.
- b) **(1b)** Napišite kriterij za disipativnost za diskretni dinamički sustav.
- c) **(1b)** Provjerite je li sustav

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n + 5 + 3x_n^2 \\ y_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n, \quad n \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

disipativan.

4. (4 boda)

- a) **(1b)** Napišite definiciju stabilnosti sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

u singularnoj točki (x_0, y_0) .

- b) **(1b)** Napišite definiciju asimptotske stabilnosti sustava iz zadatka a) u (x_0, y_0) .

c) **(1b)** Da li je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= 3x\end{aligned}$$

stabilan u $(0,0)$? Obrazložite.

d) **(1b)** Da li je sustav iz zadatka c) asimptotski stabilan u $(0,0)$? Obrazložite.

5. (5 bodova)

a) **(1b)** Napišite definiciju hiperboličkog singulariteta.

b) **(1b)** Iskažite teorem Hartmana i Grobmana.

c) **(1b)** Da li je moguće primjeniti teorem Hartmana i Grobmana na sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + x^2 \\ \dot{y} &= -y + x^2y + y^5\end{aligned}$$

u $(0,0)$? Obrazložite.

d) **(1b)** Da li je moguće primjeniti teorem Hartmana i Grobmana na sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y + x^2y + y^5\end{aligned}$$

u $(0,0)$? Obrazložite.

e) **(1b)** Za sustav iz zadatka d) nađite stabilni i centralni potprostor singulariteta $(0,0)$. Skicirajte fazni portret u okolini singulariteta $(0,0)$.

6. (2 boda) Na sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y^3 \\ \dot{y} &= -y - x^2\end{aligned}$$

primjenite Liouvilleov teorem. Obrazložite rezultat.

7. (4 boda)

a) **(3b)** Skicirajte fazni portret sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -y + x - x^3\end{aligned}$$

b) **(1b)** Primjenite Bendixsonov teorem na sustav iz zadatka a). Obrazložite rezultat.

Vrijeme pisanja ispita je 90 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.