Rješenja prvog međuispita iz Diferencijalnih jednadžbi i teorije stabilnosti
30.03.2009.

1. (4 boda)
a) (**1b**) Skripta, poglavlje 1.2, str.6 i 7.
b) (**1b**) Skripta, poglavlje 1.2, str.6 i 7.
c) (**1b**) Skripta, poglavlje 1.2, str.6 i 7.
d) (**1b**) Imamo centar, slika 1.14 na str.16 skripte. Centar ima periodičke orbite ali nema granične cikluse.

2. (3 boda)
a) (**1b**) Skripta, str.9, Teorem 3.
b) (**2b**) Imamo sedlo kao na slici 1.6, str.7 skripte.

3. (3 boda)
a) (**1b**) Skripta, str.10., pri dnu.
b) (**1b**) Skripta, str.11., na vrhu.
c) (**1b**) Sustav je disipativan jer je $|\det D\varphi(x,y)| = \frac{1}{2} < 1$.

4. (4 boda)
a) (**1b**) Skripta, str.19.
b) (**1b**) Skripta, str.19.
c) (**1b**) Računom dobijemo da su svojstvene vrijednosti matrice sustava $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{6}$, što znaći da imamo centar. Lako se vidi da je centar stabilan.
d) (**1b**) Trivijalno, centar nije asipmtotski stabilan.

5. (5 bodova)
a) (**1b**) Skripta, str.21, pri vrhu.
b) (**1b**) Skripta, str.21, teorem 6.
c) (**1b**) Kako je $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$, zaključujemo da je singularitet hiperbolički pa možemo primjeniti teorem Hartmana i Grobmana.
d) (**1b**) Kako je $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$, zaključujemo da singularitet nije hiperbolički pa ne možemo primjeniti teorem Hartmana i Grobmana.
e) (**1b**) Kako je $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = -1$, singulatritet je tipa sedlo-čvor, slično kao na slici 1.23 na str. 24, ali sa suprotnom orijentacijom na y-osi. Os x je centralni potprostor, a os y je stabilni potprostor.

6. (2 boda) Liouvilleov teorem je Teorem 5, na str.11 skripte. Kako je $\operatorname{div} \mathbf{f}(x,y) = -1$, iz teorema slijedi da je

$$\frac{dV_t}{dt} = -V_t$$

7. (4 boda)
a) (**3b**) Sustav je zapravo Duffingov mehanički oscilator iz Primjera 17, str 27. skripte. I to baš za $\delta = 1$, prikazan na slici 1.27.
b) (**1b**) Bendixsonov teorem je teorem 8 na str. 29. Kako je $\operatorname{div} \mathbf{F} = -1$ i ne mijenja predznak na cijeloj ravnini $\mathbb{R}^2$, iz teorema slijedi da sustav iz zadatka a) nigdje ne sadrži zatvorene orbite.