

## Drugi međuispit iz Diferencijalnih jednačbi i teorije stabilnosti

11.05.2009.

### 1. (3 boda)

- a) (1b) Napišite definiciju indeksa područja  $D \subset \mathbb{R}^2$  u odnosu na sustav  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , gdje je  $\mathbf{F} = (f, g)$ .
- b) (2b) Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2y \\ \dot{y} &= -2x.\end{aligned}$$

Koristeći definiciju izračunajte indeks područja omeđenog jediničnom kružnicom.

### 2. (2 boda)

- a) (1b) Da li je moguće da unutar neke zatvorene orbite u ravnini leže dva singulariteta i da su oba fokusi? Obrazložite.
- b) (1b) Unutar neke zatvorene orbite u ravnini leže tri čvora. Koliko sedala mora ležati unutar te zatvorene orbite? Obrazložite.

### 3. (6 bodova) Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= -x + y(1 - x^2 - y^2).\end{aligned}$$

- a) (1b) Napišite sustav u polarnim koordinatama.
- b) (1b) Skicirajte fazni portret sustava.
- c) (2b) Nađite eksplicitnu jednačbu Poincaréovog preslikavanja zadanog sustava u okolini graničnog ciklusa.
- d) (2b) Ispitajte stabilnost graničnog ciklusa zadanog sustava. Obrazložite.

### 4. (2 boda)

Koristeći metodu energije skicirajte fazni portret pripadnog sustava za jednačbu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 - x = 0.$$

### 5. (2 boda)

- a) (1b) Definišite derivaciju funkcije  $V(x, y)$  u odnosu na sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}$$

- b) (1b) Definišite pojmove negativne definitnosti i negativne semidefinitnosti funkcije  $V(x, y)$  na  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ .

### 6. (2 boda) Iskažite Ljapunovljev teorem stabilnosti.

### 7. (3 boda) Skicirajte fazne portrete sustava zadanog u polarnim koordinatama

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(r^4 - 2r^2 + a_0) \\ \dot{\varphi} &= 1\end{aligned}$$

ovisno o parametru  $a_0 \in \mathbb{R}$ .

Vrijeme pisanja ispita je 90 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.