Završni ispit iz Diferencijalnih jednadžbi i teorije stabilnosti
07.07.2009.
Pitanja iz 3. ciklusa nastave (18 bodova)

1. (3 boda) Riješite Sturm-Liouvilleov problem

$$\begin{aligned} y''(x) + \lambda y(x) &= 0, \qquad 0 < x < 1, \\ y(0) &= y(1) = 0. \end{aligned}$$

2. (5 bodova)
a) (**3b**) Riješite problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,\infty), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Obrazložite svaki korak u rješavanju problema.
b) (**2b**) Postupak opisan u a) dijelu zadatka primijenite na problem u kojemu je

$$u(x,0) = 2\sin(3\pi x) + 5\sin(7\pi x) + 4\sin(11\pi x).$$

3. (4 boda)
a) (**3b**) Riješite problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= \sin(5\pi x), \qquad x \in (0,1), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \pi \sin(\pi x), \qquad x \in (0,1). \end{aligned}$$

b) (**1b**) Kojeg tipa je parcijalna diferencijalna jednadžba zadana u a) dijelu zadatka?

4. (3 boda) Riješite problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \qquad x \in (0,2), \quad y \in (0,4), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(2,y) = 0, \qquad 0 < y < 4, \\ u(x,4) &= 0, \quad u(x,0) = \cos(\pi x), \qquad x \in (0,2). \end{aligned}$$

5. (3 boda) Riješite rubni problem

$$\begin{aligned} T''(\varphi) + \lambda T(\varphi) &= 0, \qquad -\pi < \varphi < \pi, \\ T(-\pi) = T(\pi), &\qquad T'(-\pi) = T'(\pi). \end{aligned}$$

Obrazložite svaki korak u rješavanju problema.

Okrenite stranicu!

Pitanja iz 1. i 2. ciklusa nastave (17 bodova)

6. (3 boda)
a) (**1b**) Napišite definiciju dinamičkog sustava.
b) (**1b**) Za sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x, \\ \dot{y} &= -2y, \end{aligned}$$

nađite preslikavanje φ^t iz definicije dinamičkog sustava.
c) (**1b**) Nacrtajte fazni portret sustava zadanog u b) dijelu zadatka.

7. (5 bodova)
a) (**1b**) Iskažite teorem Hartmana i Grobmana.
b) (**1b**) Primijenite teorem Hartmana i Grobmana na sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= x + x^2. \end{aligned}$$

c) (**1b**) Da li možete teorem Hartmana i Grobmana primijeniti na sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= -y^2? \end{aligned}$$

Obrazložite!
d) (**2b**) Koristeći invarijantne potprostore i krivulje nacrtajte fazni portret sustava iz c) dijela zadatka. Obrazložite!

8. (4 boda)
a) (**2b**) Napišite definiciju stabilnosti i asimptotske stabilnosti singulariteta $(0,0)$ sustava

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \dot{y} &= g(x,y). \end{aligned}$$

b) (**1b**) Iskažite Ljapunovljev teorem stabilnosti.
c) (**1b**) Ispitajte stabilnost sustava

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3, \\ \dot{y} &= x, \end{aligned}$$

koristeći Ljapunovljevu funkciju $V(x,y) = x^2 + y^2$.

9. (5 bodova) U ovisnosti o parametru $\mu \in \mathbb{R}$,
a) (**2b**) nacrtajte fazne portrete sustava

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(r^2 - \mu), \\ \dot{\varphi} &= 1, \end{aligned}$$

zadanog u polarnim koordinatama i
b) (**2b**) ispitajte stabilnost singularnih točaka i graničnih ciklusa.
c) (**1b**) Što je Hopfova bifurkacija?

Vrijeme pisanja ispita je 150 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.