

Prvi međuispit iz Diferencijalnih jednadžbi i teorije stabilnosti
30.03.2010.

1. (4 boda)

Zadan je dinamički sustav familijom preslikavanja $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) **(1b)** Napišite definiciju invarijantnog skupa.
- b) **(1b)** Napišite definiciju periodičke orbite.
- c) **(1b)** Napišite definiciju graničnog ciklusa.
- d) **(1b)** Skicirajte fazni portret sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2y \\ \dot{y} &= 3x\end{aligned}$$

Da li ima periodičke orbite? Obrazložite.

Da li ima granične cikluse? Obrazložite.

2. (3 boda)

Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + 3y \\ \dot{y} &= x + y\end{aligned}$$

- a) **(2b)** Dijagonalizirajte matricu zadanog sustava.
- b) **(1b)** Skicirajte fazni portret zadanog sustava.

3. (3 boda)

- a) **(1b)** Napišite definiciju konzervativnog dinamičkog sustava.
- b) **(1b)** Napišite kriterij za disipativnost za dinamički sustav s neprekinutim vremenom.
- c) **(1b)** Provjerite za koje vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$ je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ay^2 - 2x \\ \dot{y} &= ax\end{aligned}$$

konzervativan, a za koje vrijednosti je disipativan.

4. (4 boda)

- a) **(1b)** Napišite definiciju stabilnosti sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

u singularnoj točki (x_0, y_0) .

- b) **(1b)** Napišite definiciju asimptotske stabilnosti sustava iz zadatka a) u (x_0, y_0) .
- c) **(1b)** Da li je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -3y\end{aligned}$$

stabilan u $(0, 0)$? Obrazložite.

d) **(1b)** Da li je sustav iz zadatka c) asimptotski stabilan u $(0, 0)$? Obrazložite.

5. (4 boda)

a) **(1b)** Napišite definiciju hiperboličkog singulariteta.

b) **(1b)** Iskažite teorem Hartmana i Grobmana.

c) **(1b)** Da li je moguće primjeniti teorem Hartmana i Grobmana na sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - y \\ \dot{y} &= x + y^2\end{aligned}$$

u singularitetu $(0, 0)$? Obrazložite.

d) **(1b)** Da li je moguće primjeniti teorem Hartmana i Grobmana na sustav iz zadatka

c) u singularitetu $(-1, 1)$? Obrazložite.

6. (2 boda)

Za sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x \\ \dot{y} &= -y \\ \dot{z} &= -z^3\end{aligned}$$

nađite stabilni i centralni potprostor singulariteta $(0, 0, 0)$. Skicirajte fazni portret u okolini singulariteta $(0, 0, 0)$.

7. (2 boda)

Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x^2y^3 \\ \dot{y} &= x - y^2 + x^4y^4\end{aligned}$$

a) **(1b)** Definirajte kada je sustav reverzibilan i odredite da li je zadani sustav reverzibilan.

b) **(1b)** Da li zadani sustav u ishodištu ima centar? Obrazložite.

8. (3 boda)

a) **(2b)** Skicirajte fazni portret sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + xy^2 \\ \dot{y} &= -x + x^2y\end{aligned}$$

(Orijentaciju integralnih krivulja faznog portreta sustava možete odrediti promatrajući vektorsko polje.)

b) **(1b)** Primjenite Bendixsonov teorem na sustav iz zadatka a). Obrazložite rezultat.

Vrijeme pisanja ispita je 90 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.