

Rješenja prvog međuispita iz Diferencijalnih jednačbi i teorije stabilnosti
30.03.2010.

1. (4 boda)

- a) (1b) Knjiga, poglavlje 1.2, str.8.
- b) (1b) Knjiga, poglavlje 1.2, str.6 i 7.
- c) (1b) Knjiga, poglavlje 1.2, str.6 i 7.
- d) (1b) Imamo centar, slika 1.14 na str.16 skripte. Centar ima periodičke orbite ali nema granične cikluse.

2. (3 boda)

- a) (2b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- b) (1b) Imamo sedlo kao na slici 1.9, str.14 knjige.

3. (3 boda)

- a) (1b) Knjiga, str.10., pri dnu stranice.
- b) (1b) Knjiga, str.11., po sredini stranice.
- c) (1b) $\operatorname{div} \mathbf{f}(x, y) = -2 < 0$. Sustav je disipativan za svaki $a \in \mathbb{R}$.

4. (4 boda)

- a) (1b) Knjiga, str.19.
- b) (1b) Knjiga, str.19.
- c) (1b) Zadani singularitet je čvor i to ponor. Lako se vidi da je ponor stabilan.
- d) (1b) Trivijalno, svaki ponor je i asimptotski stabilan.

5. (4 boda)

- a) (1b) Knjiga, str.21, pri vrhu stranice.
- b) (1b) Knjiga, str.21, teorem 6.
- c) (1b) Kako je $\lambda_{1,2} = \pm i$, zaključujemo da singularitet nije hiperbolički pa ne možemo primjeniti teorem Hartmana i Grobmana.
- d) (1b) Kako je $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{3}$, zaključujemo da je singularitet hiperbolički pa možemo primjeniti teorem Hartmana i Grobmana.

- 6. (2 boda)** Stabilni potprostor je xy -ravnina, a centralni potprostor je z -os.

7. (2 boda)

- a) (1b) Knjiga, str.26, pri dnu stranice. Lagani račun po definiciji pokazuje da je zadani sustav reverzibilan.
- b) (1b) Lako se provjeri da su uvjeti Teorema 7., str.27 zadovoljeni, pa slijedi da zadani sustav u ishodištu ima centar.

8. (3 boda)

- a) (3b) Prvo se izjednačavanjem desne strane s nulom vidi da je jedini singularitet sustava u $(0, 0)$. Dalje se vidi da pripadajuća Jacobijeva matrica ima čisto imaginarne svojstvene vrijednosti, što znači da je ishodište nehiperbolički singularitet. Tako znamo da se radi o centru ili slabom fokusu (analogno Primjeru 11. na str. 21.). Primjenom

Bendixsonovog teorema (Teorem 8., str. 29), t.j. rješavanjem b) zadatka vidimo da sustav nema zatvorenih orbita na cijeloj ravnini bez točke ishodišta. Tako eliminiramo centar, pa ostaje da imamo slabi fokus. Orijentacija je negativna što odmah vidimo promatrajući vektorsko polje u nekoliko odabranih točaka. (Određivanje da li je slabi fokus izvor ili ponor izlazi van okvira kolegija, tako da se priznaju oba rješenja.)

b) **(1b)** Bendixsonov teorem je teorem 8 na str. 29. Kako je $\operatorname{div} \mathbf{F} = x^2 + y^2$ i ne mijenja predznak na cijeloj ravnini \mathbb{R}^2 bez točke ishodišta (označimo to područje s D), iz teorema slijedi da sustav iz zadatka a) ne sadrži zatvorene orbite u području D .