

Drugi međuispit iz Diferencijalnih jednađbi i teorije stabilnosti

17.05.2010.

1. (3 boda)

a) (1b) Napišite definiciju indeksa područja $D \subset \mathbb{R}^2$ u odnosu na sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, gdje je $\mathbf{F} = (f, g)$.

b) (2b) Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -3x \\ \dot{y} &= 3y.\end{aligned}$$

Koristeći definiciju izračunajte indeks područja omeđenog jediničnom kružnicom sa središtem u ishodištu.

2. (2 boda)

a) (1b) Da li je moguće da unutar neke zatvorene orbite u ravnini leže tri singulariteta i to jedan čvor, jedan fokus i jedan centar? Obrazložite.

b) (1b) Unutar neke zatvorene orbite u ravnini leže dva sedla, jedan fokus i n čvorova. Koliki je n ? Obrazložite.

3. (6 bodova) Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x(x^2 + y^2 - 4) \\ \dot{y} &= -x + y(x^2 + y^2 - 4).\end{aligned}$$

a) (1b) Skicirajte fazni portret zadanog sustava.

b) (2b) Nađite eksplicitnu jednađbu Poincaréovog preslikavanja zadanog sustava u okolini graničnog ciklusa.

c) (2b) Ispitajte stabilnost graničnog ciklusa zadanog sustava. Obrazložite.

d) (1b) Skicirajte fazni portret sustava zadanog u cilindričnim koordinatama

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r^3 \\ \dot{\varphi} &= 1 \\ \dot{z} &= -z^2.\end{aligned}$$

4. (2 boda) Koristeći metodu energije skicirajte fazni portret pripadnog sustava za jednađbu

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 = 0.$$

5. (2 boda) Koristeći Ljapunovljevju metodu odredite stabilnost ishodišta za sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - xy^3 \\ \dot{y} &= -y - x^3 + x^4y^2,\end{aligned}$$

pomoću $V(x, y) = ax^4 + by^2$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

6. (2 boda) Iskažite Ljapunovljev teorem nestabilnosti.

7. (3 boda) Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu - 2x^2 \\ \dot{y} &= y.\end{aligned}$$

- a) (2b) Skicirajte fazne portrete zadanog sustava u ovisnosti o parametru $\mu \in \mathbb{R}$.
b) (1b) Skicirajte bifurkacijski dijagram zadanog sustava u ovisnosti o parametru $\mu \in \mathbb{R}$.
Koji se tip bifurkacije ovdje javlja?

Vrijeme pisanja ispita je 90 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.