Završni ispit iz Diferencijalnih jednadžbi i teorije stabilnosti
24.06.2010.
Pitanja iz 3. ciklusa nastave (18 bodova)

1. (8 bodova)
a) (**3b**) Riješite Sturm-Liouvilleov problem

$$\begin{aligned} y''(x) + \lambda y(x) &= 0, \qquad 0 < x < 1, \\ y'(0) &= y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Obrazložite svaki korak u rješavanju problema.
b) (**3b**) Riješite problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0, \qquad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Obrazložite svaki korak u rješavanju problema.
c) (**2b**) Postupak opisan u b) dijelu zadatka primjenite na problem u kojemu je

$$u(x,0) = -\cos(2\pi x) + 3\cos(\pi x) + 5\cos(-7\pi x).$$

2. (4 boda)
a) (**3b**) Riješite problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,1), \quad t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \qquad t > 0, \\ u(x,0) &= -3\sin(2\pi x), \qquad x \in (0,1), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \pi \sin(2\pi x) + 3\sin(3\pi x), \qquad x \in (0,1). \end{aligned}$$

b) (**1b**) Kojeg tipa je parcijalna diferencijalna jednadžba zadana u a) dijelu zadatka?

3. (3 boda) Riješite problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 2\sin(3\pi x), \qquad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 6\pi\cos(3\pi x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

koristeći D'Alembertovu formulu.

4. (3 boda) Riješite problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \qquad x \in (0,5), \quad y \in (0,3), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(5,y) = 0, \qquad y \in (0,3), \\ u(x,3) &= 0, \quad u(x,0) = 9 + \cos(10\pi x), \qquad x \in (0,5). \end{aligned}$$

Okrenite stranicu!

Pitanja iz 1. i 2. ciklusa nastave (17 bodova)

5. (2 boda)
a) (**1b**) Napišite definiciju dinamičkog sustava.
b) (**1b**) Za sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x, \\ \dot{y} &= 5y, \end{aligned}$$

nađite preslikavanje φ^t iz definicije dinamičkog sustava.

6. (4 boda)
a) (**1b**) Napišite definiciju hiperboličkog singulariteta i iskažite teorem Hartmana i Grobmana.
b) (**2b**) Zadan je sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y + ax + x^3, \\ \dot{y} &= x - ay - xy. \end{aligned}$$

U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite da li je teorem Hartmana i Grobmana moguće primjeniti na singularitet u ishodištu.
c) (**1b**) Skicirajte fazni portret sustava iz b) dijela zadatka u okolini ishodišta u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$, za one vrijednosti a za koje možete primjeniti teorem Hartmana i Grobmana.

7. (4 boda)
a) (**1b**) Napišite definiciju periodičke orbite i definiciju graničnog ciklusa.
b) (**3b**) Zadan je sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x^3 + 6x^2y - x, \\ \dot{y} &= -y^3 - 3xy^2. \end{aligned}$$

Da li zadani sustav ima granične cikluse? Obrazložite.
Da li zadani sustav ima periodičke orbite? Obrazložite.

8. (4 boda)
a) (**2b**) Iskažite Ljapunovljev teorem stabilnosti.
b) (**2b**) Koristeći Ljapunovljevu metodu odredite stabilnost ishodišta za sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -xy + x^5 \\ \dot{y} &= -3x^2 - y^5, \end{aligned}$$

pomoću $V(x, y) = ax^2 - by^2$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$.

9. (3 boda) Zadan je sustav

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\mu x}{2} - 3x^3, \\ \dot{y} &= y. \end{aligned}$$

a) (**2b**) Skicirajte fazne portrete zadanog sustava u ovisnosti o parametru $\mu \in \mathbb{R}$.
b) (**1b**) Skicirajte bifurkacijski dijagram zadanog sustava u ovisnosti o parametru $\mu \in \mathbb{R}$. Koji se tip bifurkacije ovdje javlja?

Vrijeme pisanja ispita je 150 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.