

**Rješenja završnog ispita iz Diferencijalnih jednadžbi i teorije stabilnosti**  
24.06.2010.

**1. (8 bodova)**

- a) **(3b)** Vidi knjigu.  
b) **(3b)** Vidi knjigu.  
c) **(2b)**

$$u(x, t) = 3e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) - e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi x) + 5e^{-49\pi^2 t} \cos(7\pi x)$$

**2. (4 boda)**

- a) **(3b)**

$$u(x, t) = \sin(2\pi x) \left[ \frac{1}{2} \sin(2\pi t) - 3 \cos(2\pi t) \right] + \frac{1}{\pi} \sin(3\pi x) \sin(3\pi t)$$

- b) **(1b)** Hiperbolička.

**3. (3 boda)**

$$u(x, t) = 2 \sin(3\pi(x + t))$$

**4. (3 boda)**

$$u(x, y) = -3(y - 3) + \frac{\cos(10\pi x) \sinh(10\pi(y - 3))}{\sinh(-30\pi)}$$

**5. (2 boda)**

- a) **(1b)** Vidi knjigu.  
b) **(1b)**

$$\varphi^t(C_1, C_2) = (C_1 e^{3t}, C_2 e^{5t})$$

**6. (4 boda)**

- a) **(1b)** Vidi knjigu.  
b) **(2b)**

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Za  $|a| > 1$  singularitet je hiperbolički pa primjenjujemo teorem H.-G. i tako znamo da je sedlo. Za  $|a| \leq 1$  singularitet je nehiperbolički pa nema primjene teorema.

- c) **(1b)** Za  $|a| > 1$  skicirano je sedlo.

**7. (4 boda)**

- a) **(1b)** Vidi knjigu.

b) **(3b)** Koristimo Bendixsonov teorem.  $\operatorname{div} \mathbf{F} = -3(x - y)^2 - 1 < 0 \quad \forall x, y \Rightarrow \mathbb{R}^2$  ne sadrži zatvorene orbite, pa nema periodičkih orbita, pa onda nema ni graničnih ciklusa.

**8. (4 boda)**

- a) **(2b)** Vidi knjigu.

b) **(2b)**  $\dot{V}(x, y) = x^2 y(6b - 2a) + 2ax^6 + 2by^6$ , pa je  $a = 3b$ . Uzmimo recimo  $a = 3$  i  $b = 1$ , pa imamo  $V(x, y) = 3x^2 - y^2$ . Kako je  $\dot{V}(x, y) = 6x^6 + 2y^6$  pozitivno definitna i  $V(x, 0) = 3x^2 > 0, \forall x > 0$ , možemo primijeniti Ljapunovljev teorem nestabilnosti. Slijedi da je ishodište nestabilno.

**9. (3 boda)**

- a) **(2b)** Radi se zapravo o viličastoj bifurkaciji. Fazni portreti su slični kao u knjizi samo je ovdje os-y nestabilna.  
b) **(1b)** Viličasta bifurkacija. Bifurkacijski dijagram je sličan kao u knjizi samo su svi singulariteti uvijek nestabilni.