

Prvi međuispit iz Diferencijalnih jednadžbi i teorije stabilnosti
22.03.2011.

1. (6 bodova)

Zadan je dinamički sustav familijom preslikavanja $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) **(1b)** Napišite definiciju orbite.
- b) **(1b)** Napišite definiciju periodičke orbite.
- c) **(1b)** Napišite definiciju graničnog ciklusa.
- d) **(1b)** Napišite definiciju invarijantnog skupa.
- e) **(2b)** Skicirajte fazni portret sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (\lambda + |\lambda|)x + (\lambda - |\lambda|)y \\ \dot{y} &= (|\lambda| - \lambda)x + (|\lambda| + \lambda)y\end{aligned}$$

u ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$. Također, u ovisnosti o parametru λ odredite postojanje periodičkih orbita i graničnih ciklusa u zadanom sustavu. Obrazložite vaše tvrdnje.

2. (5 bodova)

- a) **(1b)** Napišite definicije disipativnog i konzervativnog dinamičkog sustava.
- b) **(1b)** Iskažite Liouvilleov teorem.
- c) **(3b)** Primjenom Liouvilleovog teorema na sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^2 - y^2 z^3 \\ \dot{y} &= x - y^2 \\ \dot{z} &= x^2 - xyz\end{aligned}$$

odredite je li sustav disipativan ili konzervativan ili ništa od toga, i to posebno na području za koje je $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ i posebno na cijelom prostoru \mathbb{R}^3 .

3. (5 bodova)

- a) **(2b)** Napišite definicije stabilnog, nestabilnog i centralnog potprostora sustava u okolini singularne točke u ishodištu.
- b) **(2b)** Za sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= -z \\ \dot{z} &= y,\end{aligned}$$

ako postoje nađite stabilni, nestabilni i centralni potprostor singulariteta $(0, 0, 0)$, te nađite stabilne, nestabilne i centralne invarijantne krivulje tj. plohe.

- c) **(1b)** Skicirajte fazni portret zadanog sustava u okolini singulariteta $(0, 0, 0)$.

4. (5 bodova)

- a) **(1b)** Napišite definiciju hiperboličkog singulariteta i iskažite teorem Hartmana i Grobmana.
- b) **(1b)** Da li je moguće primijeniti teorem Hartmana i Grobmana na sustav iz 3. zadatka? Obrazložite.

c) **(3b)** Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + x^2 \\ \dot{y} &= 2 + y + xy.\end{aligned}$$

Nađite sve singularitete zadanog sustava i za svaki singularitet utvrdite da li je na njega moguće primijeniti teorem Hartmana i Grobmana. Ako možete, obrazložite zašto možete i što slijedi kao posljedica tog teorema, te skicirajte fazni portret sustava u okolini tog singulariteta. Ako ne možete primijeniti teorem, obrazložite zašto ne možete.

5. (4 boda) Promotrite sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + x^2y^3 \\ \dot{y} &= xy^2 + x^5\end{aligned}$$

a) **(2b)** Proverite da li je na zadani sustav moguće primijeniti teorem o reverzibilnosti. Ako je moguće, obrazložite zašto je moguće i što slijedi iz teorema, a ako nije moguće obrazložite zašto nije.

b) **(2b)** Proverite da li je na zadani sustav moguće primijeniti Bendixsonov teorem, posebno samo na području za koje je $x > 0$, $y > 0$, a posebno na cijeloj ravnini. Obrazložite svoje tvrdnje.

Vrijeme pisanja ispita je 90 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.