

## Drugi međuispit iz Diferencijalnih jednađbi i teorije stabilnosti

3.05.2011.

### 1. (4 boda)

a) (1b) Napišite definiciju indeksa područja  $D \subset \mathbb{R}^2$  u odnosu na sustav  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ , gdje je  $\mathbf{F} = (f, g)$ .

b) (2b) Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x - 2y \\ \dot{y} &= 2x + 2y.\end{aligned}$$

Koristeći definiciju izračunajte indeks područja omeđenog jediničnom kružnicom.

c) (1b) Unutar neke zatvorene orbite u ravnini leže tri sedla, dva čvora i jedan fokus. Koliko centara mora ležati unutar te zatvorene orbite? Obrazložite.

### 2. (7 bodova) Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2 - 4) \\ \dot{y} &= x - y(x^2 + y^2 - 4).\end{aligned}$$

a) (1b) Napišite sustav u polarnim koordinatama.

b) (1b) Skicirajte fazni portret sustava.

c) (2b) Nađite eksplicitnu jednađbu Poincaréovog preslikavanja zadanog sustava u okolini graničnog ciklusa.

d) (2b) Ispitajte stabilnost graničnog ciklusa zadanog sustava. Obrazložite.

e) (1b) Skicirajte fazni portret sustava zadanog u cilindričnim koordinatama

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r^2 + r^4 \\ \dot{\varphi} &= -1 \\ \dot{z} &= -z^3.\end{aligned}$$

### 3. (2 boda)

Koristeći metodu energije skicirajte fazni portret pripadnog sustava za jednađbu

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^3 - 2x^2 - 2x = 0.$$

4. (2 boda) Koristeći Ljapunovljevu metodu odredite stabilnost ishodišta za sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y^3 - 2x^3 \\ \dot{y} &= -3x - y^3,\end{aligned}$$

pomoću  $V(x, y) = ax^2 + by^4$ , gdje su  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a, b > 0$ .

5. (2 boda) Iskažite Poincare-Bendixsonov teorem.

6. (3 boda) Zadana je jednađba

$$\dot{x} = 1 + rx + x^2$$

a) (2b) Skicirajte fazne portrete zadane jednađbe u ovisnosti o parametru  $r \in \mathbb{R}$ .

b) (1b) Skicirajte bifurkacijski dijagram zadane jednađbe u ovisnosti o parametru  $r \in \mathbb{R}$ . Koji se tip bifurkacije ovdje javlja?

Vrijeme pisanja ispita je 90 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.