Završni ispit iz Diferencijalnih jednadžbi i teorije stabilnosti
16.06.2011.
Pitanja iz 3. ciklusa nastave (18 bodova)

1. (9 bodova)
a) (**3b**) Riješite Sturm-Liouvilleov problem

$$\begin{aligned} y''(x) + \lambda y(x) &= 0, \qquad 0 < x < 1, \\ y(0) &= y(1) = 0. \end{aligned}$$

Obrazložite svaki korak u rješavanju problema.
b) (**3b**) Riješite problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in (0,1), \quad t \in (0,\infty), \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \qquad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) &= u_0(x), \qquad x \in (0,1). \end{aligned}$$

Obrazložite svaki korak u rješavanju problema.
c) (**2b**) Postupak opisan u b) dijelu zadatka primijenite na problem u kojemu je

$$u(x,0) = 4\sin(2\pi x) + 3\sin(-5\pi x).$$

d) (**1b**) Kojeg tipa je parcijalna diferencijalna jednadžba zadana u b) dijelu zadatka?

2. (3 boda) Riješite problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 3\cos(2\pi x), \qquad x \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 4\pi \sin(2\pi x), \qquad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

koristeći D'Alembertovu formulu.

3. (3 boda) Riješite problem

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y) &= 0, \qquad x \in (0,3), \quad y \in (0,2), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) &= \frac{\partial u}{\partial x}(3,y) = 0, \qquad 0 < y < 2, \\ u(x,2) &= 0, \quad u(x,0) = -6 + 2\cos(3\pi x), \qquad x \in (0,3). \end{aligned}$$

4. (3 boda) Riješite rubni problem

$$\begin{aligned} T''(\varphi) + \lambda T(\varphi) &= 0, \qquad -2\pi < \varphi < 2\pi, \\ T(-2\pi) = T(2\pi), &\qquad T'(-2\pi) = T'(2\pi). \end{aligned}$$

Obrazložite svaki korak u rješavanju problema.

Okrenite stranicu!

Pitanja iz 1. i 2. ciklusa nastave (17 bodova)

5. (3 boda)
a) (**1b**) Napišite definiciju periodičke orbite.
b) (**1b**) Napišite definiciju graničnog ciklusa.
c) (**1b**) Napišite jedan sustav u ravnini koji u $(0,0)$ ima singularitet tipa fokusa.

6. (3 boda)
a) (**1b**) Napišite definiciju hiperboličkog singulariteta.
b) (**1b**) Iskažite teorem Hartmana i Grobmana.
c) (**1b**) Napišite jedan sustav u ravnini koji u $(0,0)$ ima singularitet na koji se može primjeniti teorem Hartmana i Grobmana.

7. (6 bodova)
a) (**2b**) Napišite definiciju stabilnosti i asimptotske stabilnosti singulariteta $(0,0)$ sustava

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,y), \\ \dot{y} &= g(x,y). \end{aligned}$$

b) (**2b**) Iskažite Ljapunovljev teorem stabilnosti.
c) (**2b**) Ispitajte stabilnost sustava

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - x^3, \\ \dot{y} &= 2x - y^5, \end{aligned}$$

koristeći Ljapunovljevu funkciju oblika $V(x,y) = ax^2 + by^2$, $a, b > 0$.

8. (5 bodova) U ovisnosti o parametru $\mu \in \mathbb{R}$,
a) (**2b**) nacrtajte fazne portrete sustava

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(\mu + r)(\mu - r), \\ \dot{\varphi} &= -1, \end{aligned}$$

zadanog u polarnim koordinatama i
b) (**2b**) ispitajte stabilnost singularnih točaka i graničnih ciklusa.
c) (**1b**) Što je Hopfova bifurkacija?

Vrijeme pisanja ispita je 150 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.