

Međuispit iz Diferencijalnih jednažbi i teorije stabilnosti
3.05.2009.

1. (6 bodova)

Zadan je dinamički sustav familijom preslikavanja $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$.

- a) **(1b)** Napišite definiciju faznog portreta.
- b) **(1b)** Napišite definiciju periodičke orbite.
- c) **(1b)** Napišite definiciju graničnog ciklusa.
- d) **(3b)** Skicirajte fazni portret sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x\end{aligned}$$

Da li ima periodičke orbite? Obrazložite.

Da li ima granične cikluse? Obrazložite.

2. (4 boda)

- a) **(1b)** Napišite definiciju disipativnog dinamičkog sustava.
- b) **(1b)** Napišite kriterij za disipativnost za diskretni dinamički sustav.
- c) **(2b)** Provjerite je li sustav

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= 2y_n - 1 + x_n^2 \\ y_{n+1} &= \frac{1}{3}x_n + 1, \quad n \in \mathbb{N}\end{aligned}$$

disipativan.

3. (2 boda)

- a) **(1b)** Napišite definiciju asimptotske stabilnosti sustava

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

u singularnoj točki (x_0, y_0) .

- b) **(1b)** Da li je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y \\ \dot{y} &= x - y\end{aligned}$$

asimptotski stabilan u $(0, 0)$? Obrazložite.

4. (5 bodova)

- a) **(3b)** Napišite definiciju hiperboličkog singulariteta i iskažite teorem Hartmana i Grobmana.
- b) **(1b)** Da li je moguće primjeniti teorem Hartmana i Grobmana na sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x + x^2 + xy^2 + y^3 \\ \dot{y} &= -y + 2x^2y + y^7\end{aligned}$$

u $(0, 0)$? Obrazložite.

c) **(1b)** Da li je moguće primjeniti teorem Hartmana i Grobmana na sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + xy^2 + y^3 \\ \dot{y} &= -y + 2x^2y + y^7\end{aligned}$$

u $(0, 0)$? Obrazložite.

5. (3 boda)

Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + y^3 - x^5y \\ \dot{y} &= x + x^2y^2 + x^5\end{aligned}$$

a) **(1b)** Definirajte kada je sustav reverzibilan.

b) **(1b)** Odredite da li je zadani sustav reverzibilan?

c) **(1b)** Da li zadani sustav u ishodištu ima centar? Obrazložite.

6. (3 boda)

Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y + y^2 - y^5 \\ \dot{y} &= -\delta y + x - x^3\end{aligned}$$

u ovisnosti o parametru $\delta \in \mathbb{R}$. Ako je $\delta \neq 0$, da li sustav ima periodičke orbite? Obrazložite.

7. (6 bodova)

a) **(2b)** Napišite definiciju indeksa područja $D \subset \mathbb{R}^2$ u odnosu na sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$, gdje je $\mathbf{F} = (f, g)$.

b) **(2b)** Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x.\end{aligned}$$

Koristeći definiciju izračunajte indeks područja omeđenog jediničnom kružnicom.

c) **(2b)** Da li je moguće da unutar neke zatvorene orbite u ravnini leže tri singulariteta i da su sva tri fokusi ili čvorovi? Obrazložite. Iskažite teorem koji riješava ovaj problem.

8. (6 bodova) Zadan je sustav

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} &= -x - y(x^2 + y^2 - 1).\end{aligned}$$

a) **(2b)** Napišite sustav u polarnim koordinatama.

b) **(2b)** Skicirajte fazni portret sustava.

c) **(2b)** Ispitajte stabilnost graničnog ciklusa zadanog sustava. Obrazložite.

Vrijeme pisanja ispita je 90 minuta. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire i pribor za pisanje.