

1. domaća zadaća iz Diferencijalnih jednađzbi i teorije stabilnosti

1. Zadana je diferencijalna jednađzba $\dot{Q} = 1 - Q$, $Q(0) = 0$.

- Riješite jednađzbu i nacrtajte graf rješenja $Q = Q(t)$.
- Skicirajte fazni portret zadane jednađzbe.
- Nadite maksimalni interval na kojem je definirano rješenje zadane jednađzbe.

2. Zadana je diferencijalna jednađzba $\ddot{\theta} + \cos \theta = 0$.

- Zapišite zadanu jednađzbu kao sustav diferencijalnih jednađzbi.
- Skicirajte fazni portret sustava iz a).

3. Zadana je diferencijalna jednađzba $\ddot{y} + 4\dot{y} + 5y = 0$.

- Riješite jednađzbu i nacrtajte graf rješenja $y = y(t)$ uz početne uvjete $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$.
- Zapišite zadanu jednađzbu kao sustav diferencijalnih jednađzbi.
- Skicirajte fazni portret sustava iz b).

4. Zadana je diferencijalna jednađzba $\ddot{y} - 4\dot{y} + 3y = 0$.

- Riješite jednađzbu i nacrtajte graf rješenja $y = y(t)$ uz početne uvjete $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.
- Zapišite zadanu jednađzbu kao sustav diferencijalnih jednađzbi.
- Skicirajte fazni portret sustava iz b).

5. Zadana je diferencijalna jednađzba $\dot{x} = 3\sqrt[3]{x^2}$, $x(3) = 0$.

- Riješite jednađzbu i nacrtajte graf rješenja $x = x(t)$.
- Ima li zadana jednađzba jednoznačno rješenje? Obrazložite.

6. Zadan je diskretni dinamički sustav $x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 1$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Odredite prve 3 iteracije počevši sa $x_0 = 1$.
- Odredite prve 3 iteracije počevši sa $x_0 = 3$.
- Da li je zadani sustav konzervativan ili disipativan? Obrazložite.

7. Zadan je diskretni dinamički sustav $x_{n+1} = y_n + 1$, $y_{n+1} = x_n + y_n^2 - y_n$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Odredite prve 4 iteracije počevši sa $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.
- Odredite prve 4 iteracije počevši sa $x_0 = 1$, $y_0 = 1$.
- Da li je zadani sustav konzervativan ili disipativan? Obrazložite.

8. Zadana je diferencijalna jednađzba $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, gdje je $\mathbf{f}(x, y) = (2y - x^3, 2 - x - y)$.

- Da li je neprekinuti dinamički sustav definiran tokom te jednađzbe konzervativan ili disipativan?
- Ako je $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ tok zadane jednađzbe, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ pravokutnik omeđen ko-

ordinatnim osima i pravcima $x = 2$ i $y = -1$, $D_t = \varphi^t(D)$ i $V_t = \text{vol}(D_t)$, izračunajte

$$\left. \frac{dV_t}{dt} \right|_{t=0}$$

9. Zadana je diferencijalna jednačina $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, gdje je $\mathbf{f}(x, y, z) = (yz + 1, z^2 - y^2 - 2, x^3 + 2yz - z)$.

a) Da li je neprekinuti dinamički sustav definiran tokom te jednačine konzervativan ili disipativan?

b) Ako je $\{\varphi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ tok zadane jednačine, $D \subseteq \mathbb{R}^3$ kocka omeđena ravninama $x = 1$, $x = 3$, $y = -2$, $y = -4$, $z = -1$, $z = 1$, te $D_t = \varphi^t(D)$ i $V_t = \text{vol}(D_t)$, izračunajte

$$\left. \frac{dV_t}{dt} \right|_{t=0}$$

10. Zadan je Hamiltonov sustav $\dot{x} = -3y$, $\dot{y} = 2x$

a) Odredite Hamiltonian $H(x, y)$.

b) Skicirajte fazni portret zadanog sustava.

c) Skicirajte familiju krivulja $H(x, y) = C$.

d) Usporedite ponašanje Hamiltoniana H i faznog portreta zadanog sustava.

11. Zadan je linearni sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, pri čemu je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

a) Nađite dijagonalizaciju matrice \mathbf{A} , ako je to moguće.

b) Napišite sustav u skalarnom obliku.

c) Skicirajte fazni portret sustava u okolini singularne točke.

d) Nađite stabilni i nestabilni potprostor singularne točke i tok na tim potprostorima.

e) Skicirajte vektorsko polje $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x, y)$.

12. Zadan je linearni sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, pri čemu je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Nađite Jordanovu formu matrice \mathbf{A} u obliku $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

b) Napišite sustav u skalarnom obliku.

c) Skicirajte fazni portret sustava u okolini singularne točke.

d) Nađite stabilni i nestabilni potprostor singularne točke i tok na tim potprostorima.

e) Skicirajte vektorsko polje $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x, y)$.

13. Zadan je linearni sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, pri čemu je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}.$$

- Nadite Jordanovu formu matrice \mathbf{A} u obliku $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$.
- Napišite sustav u skalarnom obliku.
- Skicirajte fazni portret sustava u okolini singularne točke.
- Nadite stabilni i nestabilni potprostor singularne točke i tok na tim potprostorima.
- Skicirajte vektorsko polje $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x, y)$.

14. Zadan je linearni sustav $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, pri čemu je $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Nadite dijagonalizaciju matrice \mathbf{A} , ako je to moguće.
- Napišite sustav u skalarnom obliku.
- Skicirajte fazni portret sustava u okolini singularne točke.
- Nadite stabilni i nestabilni potprostor singularne točke i tok na tim potprostorima.
- Skicirajte vektorsko polje $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} = (x, y)$.

15. Zadan je linearni sustav u ravnini $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -5y$

- Bez rješavanja sustava skicirajte fazni portret.
- Egzaktno riješite sustav i odredite $\varphi^t(C_1, C_2)$ i jednadžbe trajektorija.
- Da li je singularna točka stabilna? Obrazložite.

16. Zadan je nelinearni sustav u ravnini $\dot{x} = x + y^3$, $\dot{y} = -2y$.

- Odredite sve singularitete zadanog sustava.
- Odredite svojstvene vrijednosti svih singulariteta iz a).
- Koji singulariteti iz a) su hiperbolički?
- Ako možete, odredite topološki tip singulariteta iz a). Ako ne, odredite barem topološki tip singulariteta linearnog dijela sustava.
- Odredite stabilni, nestabilni i centralni potprostor.

17. Zadan je nelinearni sustav u ravnini $\dot{x} = -x$, $\dot{y} = y - 2y^2 + y^3$.

- Odredite sve singularitete zadanog sustava.
- Odredite svojstvene vrijednosti svih singulariteta iz a).
- Koji singulariteti iz a) su hiperbolički?
- Ako možete, odredite topološki tip singulariteta iz a). Ako ne, odredite barem topološki tip singulariteta linearnog dijela sustava.
- Odredite stabilni, nestabilni i centralni potprostor.

18. Zadan je nelinearni sustav u ravnini $\dot{x} = y + x^2$, $\dot{y} = -x + y^2$.

- Odredite sve singularitete zadanog sustava.
- Odredite svojstvene vrijednosti svih singulariteta iz a).
- Koji singulariteti iz a) su hiperbolički?
- Ako možete, odredite topološki tip singulariteta iz a). Ako ne, odredite barem topološki tip singulariteta linearnog dijela sustava.
- Odredite stabilni, nestabilni i centralni potprostor.

19. Zadan je nelinearni sustav u ravnini $\dot{x} = 3y + xy - y^5$, $\dot{y} = -2x - x^2 + 3xy^2$.

- Odredite neki singularitet zadanog sustava.
- Odredite svojstvene vrijednosti singulariteta iz a).
- Da li je taj singularitet iz a) hiperbolički? Obrazložite.
- Da li je zadan sustav reverzibilan? Obrazložite.
- Dokažite koristeći pripadajući teorem da zadani sustav u ishodištu ima centar.

20. Zadan je nelinearni sustav u ravnini $\dot{x} = 2x - x^2 + xy + y^2$, $\dot{y} = -y + x^2 + xy - y^2/2$. Koristeći Bendixonov teorem odgovorite na pitanja:

- Da li je moguće da u prvom kvadrantu postoje zatvorene orbite zadanog sustava? Obrazložite.
- Da li je moguće da u drugom kvadrantu postoje zatvorene orbite zadanog sustava? Obrazložite.
- Da li je moguće da u trećem kvadrantu postoje zatvorene orbite zadanog sustava? Obrazložite.
- Da li je moguće da u četvrtom kvadrantu postoje zatvorene orbite zadanog sustava? Obrazložite.

21. - 25. Zadan je dinamički sustav sa singularitetom u ishodištu.

a) Izračunajte po definiciji indeks tog singulariteta. Za krivulju γ uzmite jediničnu kružnicu sa centrom u ishodištu. (U slučaju da ne znate egzaktno riješiti integral iz definicije indeksa, poslužite se Wolframovom Mathematicom ili nekim drugim alatom.)

b) Za koju krivulju γ dobivate vrlo jednostavan integral prilikom računanja indeksa po definiciji? Izračunajte indeks za tu krivulju γ .

c) Ovisi li indeks o odabiru krivulje γ ? Obrazložite.

d) Izračunajte indeks pomoću rotacije vektora.

21.

$$\dot{x} = x, \quad \dot{y} = 2y$$

22.

$$\dot{x} = -5x, \quad \dot{y} = y$$

23.

$$\dot{x} = -2x + y^2, \quad \dot{y} = -y + 2x^3$$

24.

$$\dot{x} = x + y, \quad \dot{y} = y$$

25.

$$\dot{x} = x - y, \quad \dot{y} = x + y$$

(U zadacima **23.** i **24.** bi c) bio pre težak, pa ga ne morate rješavati.)

26. - 27. Zadan je dinamički sustav u ravnini.

a) Odredite sve granične cikluse zadanog sustava.

b) Odredite stabilnost graničnih ciklusa koristeći divergenciju sustava (vidi Teorem 11).

c) Skicirajte fazni portret zadanog sustava.

26.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2)^2 \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2)^2\end{aligned}$$

27.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

28. - 30. Nacrtajte fazne portrete zadanih sustava koristeći metodu energije.

28.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \sin x = 0$$

29.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - e^x + x^2 - 1 = 0$$

30.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x^2 + x - 2 = 0$$