

## Završni ispit - rješenja

23. siječnja 2012.

Ime i prezime: \_\_\_\_\_ JMBAG: \_\_\_\_\_

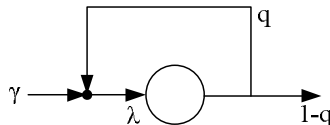
Vlastoručni potpis: \_\_\_\_\_

**Trajanje ispita: 120 minuta**

**Maksimalan broj bodova: 100**

**Postupak i rješenje uredno napišite na odvojene papire.**

1. [10] Jednostavna netrivialna mreža redova sastoji se od jednog čvora s povratnom vezom (vidi sliku). (a) Napišite prometnu jednadžbu za ukupnu ulaznu brzinu (tok)  $\lambda$ ? (b) Ako je  $b (= 1/\mu)$  srednje trajanje posluživanja odredite brzine prometa (tokova) u povratnoj grani i izlazu iz mreže. Koji uvjet mora biti ispunjen da bi mreža bila stabilna?



**Rješenje:**

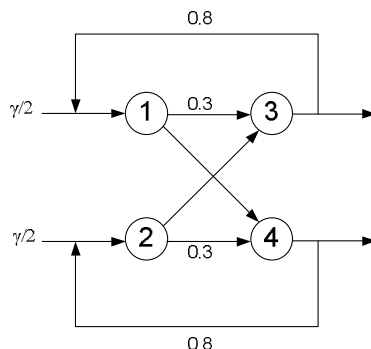
(a)  $\lambda = \gamma + \lambda q \Rightarrow \lambda = \gamma / (1 - q)$

(b) Uvjet za stabilnost sustava:  $\rho = \lambda b < 1 \Rightarrow \gamma b < (1 - q)$

Prometni tok u povratnoj grani:  $\lambda q = \gamma q / (1 - q)$

Brzina odlaska iz mreže:  $\lambda(1 - q) \equiv \gamma$

2. [10] Analizirajte mrežu od četiri čvora prikazanu na slici. Paketi ulaze u mrežu u čvorovima 1 i 2 s jednakim brzinama  $\gamma/2$ . Usmjeravanje je sljedeće: iz čvora 1 paketi ide u čvor 3 s vjerojatnosti 0.3 a u čvor 4 s vjerojatnosti 0.7; iz čvora 2 u čvor 3 ili 4 s vjerojatnosti 0.7 odnosno 0.3. Iz čvora 3 paketi se vraćaju u čvor 1 s vjerojatnosti 0.8 a napuštaju mrežu s vjerojatnosti 0.2. Slično je i za čvor 4. Napišite prometne jednadžbe za tu mrežu te odredite ulazne brzine  $\lambda_i$  za sve čvorove  $i = 1, \dots, 4$ . Koji uvjet mora biti ispunjen da bi mreža bila stabilna?



**Rješenje:**

$$\lambda_1 = \frac{\gamma}{2} + 0.8\lambda_3; \quad \lambda_2 = \frac{\gamma}{2} + 0.8\lambda_4; \quad \lambda_3 = 0.3\lambda_1 + 0.7\lambda_2; \quad \lambda_4 = 0.7\lambda_1 + 0.3\lambda_2 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4 = 5\gamma \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 2.5\gamma$$

Srednja vremena posluživanja  $\tau_i = 1/\mu_i$  mogu biti različita, ali sva moraju biti manja od  $1/(2.5\gamma)$ , tj.  $2.5\gamma < \mu_i, i = 1, \dots, 4$ .

3. [10] Za mrežu iz Zadatka 2 srednja trajanja posluživanja  $b_i = 1/\mu_i$  su redom:  $b_1 = b_2 = 1, b_3 = b_4 = 2$ . (a) Kolika je najveća donja granica prosječnog vremena odziva  $T$  (tj. prosječnog vremena boravka paketa u mreži)? (b) Koje ograničenje treba postaviti na vanjsku dolaznu brzinu  $\gamma$  pa da vrijeme boravka bude  $T < 20$ ?

**Rješenje:**

- (a) Rješavanjem Zadatka 2 dobivene su ukupne dolazne brzine  $\lambda_i = 2.5\gamma, i = 1, 2, 3, 4$ . Intenziteti prometa su  $\rho_1 = \rho_2 = 2.5\gamma, \rho_3 = \rho_4 = 5\gamma$ . Uvjet za stabilnost je  $\gamma < 0.2$ .

Ukupni prosječan broj paketa u mreži i prosječno vrijeme boravka paketa iznose:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 = \frac{5\gamma}{1-2.5\gamma} + \frac{10\gamma}{1-5\gamma}$$

$$T = \frac{N}{\gamma} = \frac{5}{1-2.5\gamma} + \frac{10}{1-5\gamma}$$

$T$  je rastuća funkcija od  $\gamma$  pa se najveća donja granica dobiva uz  $\gamma = 0$  i ona je  $T > 15$ .

Drugi način određivanja granice: srednji broj posjeta svakom čvoru je  $v_i = \lambda_i/\gamma = 2.5$ , a ukupno potrebno prosječno trajanje posluživanja paketa u čvoru  $i$  tijekom njegovog boravka u mreži je  $v_i b_i = (\lambda_i b_i)/\gamma = \rho_i/\gamma$ . Potrebno ukupno srednje vrijeme posluživanja paketa u svim čvorovima tijekom njegovog boravka u mreži ( $N = 4$ ):

$$\bar{T} = \sum_{i=1}^N v_i b_i = \frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^N \rho_i = 2.5 + 2.5 + 5 + 5 = 15.$$

- (b) Zahtjev  $T < 20$  vodi u kvadratnu jednadžbu:

$$50\gamma^2 - 20\gamma + 1 > 0$$

Koja uz uvjet stabilnosti implicira

$$\gamma < \frac{2 - \sqrt{2}}{10} \approx 0.0586$$

4. [15] Paketi prosječne duljine  $L$  [bit/paket] dolaze u komutacijski čvor sukladno Poissonovom procesu sa srednjom brzinom  $\lambda$  [paket/s]. Jedna izlazna linija komutacijskog čvora ima brzinu  $C$  [bit/s]. Usporedite slučaj (a) kad su duljine paketa eksponencijalno raspodjeljene sa slučajem (b) kad su duljine paketa fiksne. Kao mjeru usporedbe ovih slučajeva uzmite srednje vrijeme tranzita paketa kroz komutacijski čvor i srednji broj paketa u ulaznom spremniku komutacijskog čvora. Koji od slučajeva daje bolje performanse?

**Rješenje:**

- (a) Kad se duljine paketa ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi (model M/M/1), uz prijenosno vrijeme  $\tau = 1/\mu = L/C$ , dobivamo:

$$N_{\text{exp}} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda(L/C)}{1 - \lambda(L/C)}$$

$$T_{\text{exp}} = \frac{N}{\lambda} = \frac{(L/C)}{1 - \lambda(L/C)}$$

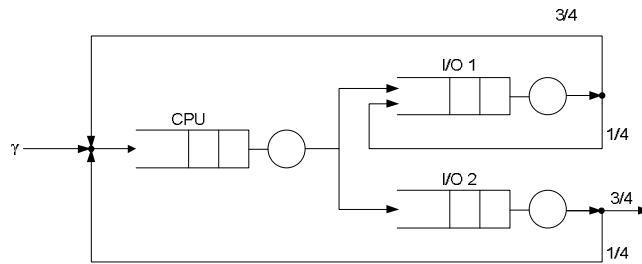
- (b) Kad su paketi stalne duljine sustav modeliramo kao M/D/1 model. Prijenosno vrijeme je  $\tau = 1/\mu = L/C$  a  $\sigma^2 = 0$  je u modelu M/G/1:

$$\begin{aligned} N_{\text{fix}} &= N_{\rho} + \rho = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)} + \rho = \frac{\rho}{1 - \rho} - \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)} = \\ &= \frac{\lambda(L/C)}{1 - \lambda(L/C)} - \frac{\lambda^2(L/C)^2}{2(1 - \lambda(L/C))} = N_{\text{exp}} - \frac{\lambda^2(L/C)^2}{2(1 - \lambda(L/C))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{fix}} &= \frac{N}{\lambda} = \frac{\lambda/\mu^2}{2(1 - \rho)} + \frac{1}{\mu} = \\ &= \frac{(L/C)}{1 - \lambda(L/C)} - \frac{\lambda(L/C)^2}{2(1 - \lambda(L/C))} = T_{\text{exp}} - \frac{\lambda(L/C)^2}{2(1 - \lambda(L/C))} \end{aligned}$$

Vidimo da kad se uspoređuju vrijeme tranzita i broj paketa u komutacijskom sustavu tada uz konstantno vrijeme posluživanja dobivamo bolje performanse nego uz eksponencijalno vrijeme posluživanja.

5. [15] Na slici je prikazan računarski sustav u čiji CPU dolaze poslovi sukladno Poissonovom procesu s brzinom  $\gamma$ . Posao se izvodi u CPU sukladno eksponencijalnoj razdiobi sa srednjim vremenom obrade  $1/\mu_1$  a zatim odlazi na posluživanje bilo na I/O1 ili na I/O2 s jednakom vjerojatnosti. Vremena obrade na I/O jedinicama ravnaju se po eksponencijalnim razdiobama sa srednjim trajanjima  $1/\mu_2$  odnosno  $1/\mu_3$ . Nakon prolaska kroz neku I/O jedinicu posao se može vratiti ili u CPU ili napustiti sustav s vjerojatnostima označenim na slici. Izračunajte:
- Funkciju gustoće vjerojatnosti  $p(n_1, n_2, n_3)$  za cijelu mrežu prema Jacksonovom teoremu;
  - Ako su  $\mu_1 = 8\gamma$  i  $\mu_2 = \mu_3 = 4\gamma$  odredite srednji broj poslova u svakom redu;
  - Izračunajte srednji broj poslova u mreži i prosječno vrijeme koje neki posao provede u mreži.



**Rješenje:**

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  su efektivne brzine dolazaka u CPU, I/O1 i I/O2. Prometne jednačbe:

$$\lambda_1 = \gamma + \frac{3}{4}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{4}\lambda_2$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2}\lambda_1$$

$$\lambda_1 = \frac{8}{3}\gamma, \quad \lambda_2 = \frac{16}{9}\gamma, \quad \lambda_3 = \frac{4}{3}\gamma$$

(a) 
$$p(n_1, n_2, n_3) = \left(1 - \frac{8\gamma}{3\mu_1}\right) \left(1 - \frac{16\gamma}{9\mu_2}\right) \left(1 - \frac{4\gamma}{3\mu_3}\right) \left(\frac{8\gamma}{3\mu_1}\right)^{n_1} \left(\frac{16\gamma}{9\mu_2}\right)^{n_2} \left(\frac{4\gamma}{3\mu_3}\right)^{n_3}$$

(b)

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} = \frac{1}{3}, \quad \rho_2 = \frac{4}{9}, \quad \rho_3 = \frac{1}{3}$$

$$N_{CPU} = \frac{\rho_1}{1 - \rho_1} = \frac{1/3}{1 - 1/3} = \frac{1}{2}, \quad N_{I/O1} = \frac{4}{5}, \quad N_{I/O2} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$N = N_{CPU} + N_{I/O1} + N_{I/O2} = \frac{9}{5}$$

$$T = \frac{N}{\gamma} = \frac{9}{5\gamma}$$

6. [20] Sustav posluživanja sastoji se od jednog poslužitelja. Poslovi dolaze u paru (tj. po dva posla) na posluživanje. Njihovi dolasci odgovaraju Poissonovom procesu sa srednjom brzinom 1 par/h, a posluživanje je FIFO. Vrijeme potrebno za posluživanje pojednog ~~para poslova~~ **posla** ravna se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednosti 15 minuta.

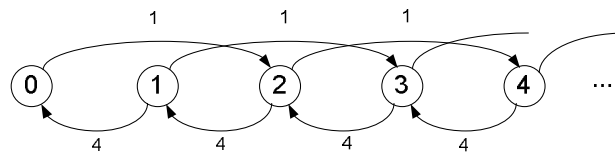
(a) Formulirajte model opisanog sustava posluživanja u kojem se pojedini posao (ne par poslova) smatra korisnikom. Skicirajte dijagram stanja i napišite jednačbe ravnoteže, ali ih ne trebate riješiti.

- (b) Formulirajte model opisanog sustava posluživanja u kojem se par poslova smatra korisnikom. Izračunajte ukupno očekivano vrijeme obrade para poslova.

**Rješenje:**

Predloženo rješenje odgovara formulaciji koja je dana u gornjem korigiranom tekstu (vidi korigirani tekst zadatka). Rješenje zadatka iz ispita razlikuje se u dijelu (b): model je uobičajeni M/M/1 red s parametrima  $\lambda = 1$  i  $\mu = 4$ ;  $T = 1/3$ . Obje verzije rješenja bit će bodovane. Neusklađenost teksta zadatka i objavljenog rješenja uočio je student Filip Rožić.

- (a)

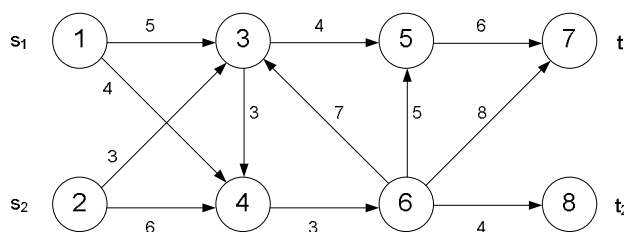


$$\mu p_1 = \lambda p_0, \mu p_2 = (\lambda + \mu)p_1, \lambda p_0 + \mu p_3 = (\lambda + \mu)p_2, \dots, \lambda p_{n-2} + \mu p_{n+1} = (\lambda + \mu)p_n$$

- (b) Model koji odgovara ovom slučaju je  $M/E_k/1$ ,  $k = 2$ . Dobivamo ga kao specijalni slučaj modela  $M/G/1$  u kojem je  $\sigma^2 = 1/(k\mu^2)$ . Dakle, uz Poissonov ulaz brzine  $\lambda = 1$  i Erlangovo posluživanje brzine  $\mu = 4/2 = 2$  i  $k = 2$  imamo:

$$T = \left( \frac{1+k}{2k} \right) \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} + \frac{1}{\mu} = \frac{7}{8}$$

7. [20] Za mrežu na slici koja ima dva izvorišna i dva odredišna čvora primjenom algoritma Forda i Fulkersona dredite: (a) raspodjelu tokova u svakoj iteraciji, (b) vrijednost maksimalnog toka i (c) grane u minimalnom rezu. [Uputa: mrežu treba reducirati na mrežu s jednim izvorištem (odredištem) uvođenjem novog izvorišta (odredišta) koji je povezan s postojećim izvorištem (odredištem).]



**Rješenje:**

- (a) Postoji više mogućih rješenja.  
 (b) 7  
 (c) {3,5}, {4,6}

### Korisne formule:

$$\sum_{n=0}^N x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}, \quad \text{za svaki } x \neq 1; \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \text{za } |x| < 1$$

$$\text{Poissonova razdioba: } P\{X = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Erlang-B: } B(c, a) = p_c = \frac{a^c}{c!} \left[ \sum_{k=0}^c \frac{a^k}{k!} \right]^{-1}, \quad a = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\text{Erlang-C: } C(c, a) = P_Q = \sum_{n=c}^{\infty} p_n = \frac{a^c}{(c-1)!(c-a)} p_0, \quad p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{c-1} \frac{a^k}{k!} + \frac{a^c}{(c-1)!(c-a)} \right]^{-1}, \quad 0 \leq a < c$$

$$\text{M/M/1: } p_n = (1-\rho)\rho^n, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$$

$$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{\rho}{1-\rho}, \quad N_Q = \lambda W = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

$$T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\mu - \lambda}, \quad W = T - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu - \lambda}$$

$$P\{T > t\} = e^{-t/T} \quad (t \geq 0), \quad P\{W > t\} = \rho e^{-t/T} \quad (t \geq 0)$$

M/M/c/K (ne treba u ovoj zadaći!):

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{a}{c}$$

$$1 \leq n \leq c: \quad p_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^n p_0 = \frac{(c\rho)^n}{n!} p_0$$

$$c < n \leq K: \quad p_n = \frac{c^c}{c!} \left( \frac{\lambda}{c\mu} \right)^n p_0 = \frac{c^c \rho^n}{c!} p_0$$

$$n > K: \quad p_n = 0$$

$$\rho \neq 1: \quad p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \left( \frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho} \right) \right]^{-1}$$

$$\rho = 1: \quad p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} (K-c+1) \right]^{-1}$$

M/G/1 (Pollaczek-Khintchine):

$$N_Q = \frac{\lambda^2 \sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}; \quad N = N_Q + \rho; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda}; \quad T = \frac{N}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu}$$

M/D/1: Pollaczek-Khinchinove formule za M/G/1 uz  $\sigma^2 = 0$ .