Rješenja ispita iz Matematike 3R/E

9. veljače 2011.

Pitanja iz 1. ciklusa

1. (4 boda) Izvedite formule za koeficijente a_n, $n \geq 0$ trigonometrijskog Fourierovog reda zadane funkcije $f\colon[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ po trigonometrijskom sustavu $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$! (Integrale koji nisu tablični potrebno je izračunati!)

Rješenje:

Za funkciju $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ promatramo pripadni Fourierov red oblika $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n\geq 1} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Za $f(x)$ i $S(x)$ vrijedi da je $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} S(x)\phi(x)\mathrm{d}x$, za sve funkcije ϕ iz danog trigonometrijskog sustava. Vrijede jednakosti:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \mathrm{d}x = 0$$

za sve prirodne $m \neq n$ (i $m = n$ za zadnji),

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \mathrm{d}x = \pi \text{ (za prirodne } n),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \sin nx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} \cos nx \mathrm{d}x = 0 \text{ i}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} (\frac{1}{2})^2 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Zaključujemo da je $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} S(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} f(x)\mathrm{d}x$, pa je

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Analogno, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) S(x)\mathrm{d}x = \pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\mathrm{d}x$, pa je

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x)\mathrm{d}x.$$

◇

2. (5 bodova) Prikažite pomoću Fourierovog integrala neparno proširenje funkcije

$$f(x) = xe^{-x}, \quad x > 0\,.$$

(Naputak: za računanje spektra koristite Laplaceovu transformaciju.)

Rješenje:

Neparno proširenje funkcije $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definirano je formulom $f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0 \\ xe^{x}, & x \leq 0 \end{cases}.$

Kako je $f(x)$ neparna funkcija, to je $A(\lambda) = 0$.

Računamo $B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\lambda x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} x \sin(\lambda x)\mathrm{d}x$.

Neka je $\phi_\lambda(x) = \sin(\lambda x) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\lambda}{s^2+\lambda^2} = \Phi_\lambda(s)$. Tada, po teoremu o deriviranju slike vrijedi da je $x\phi_\lambda(x) \circ\!\!-\!\!\bullet -\Phi'_\lambda(s)$, pa je $B(\lambda) = -2\Phi'_\lambda(1) = \frac{4\lambda}{(1+\lambda^2)^2}$, pa dobivamo

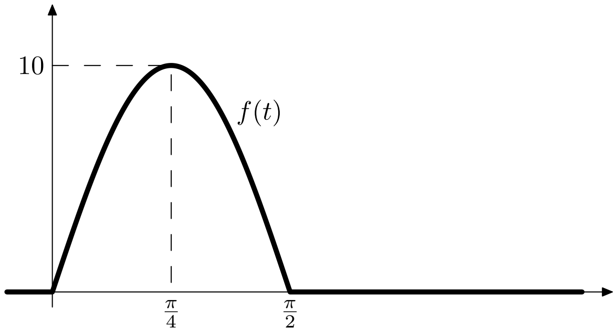
$$f(x) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{(\lambda^2+1)^2} \mathrm{d}\lambda.$$

◇

3. (5 bodova) Riješite Cauchyjev problem

$$\begin{cases} y'(t) + y(t) = f(t), \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

pri čemu je $f(t)$ poluval sinusoide dan slikom.



Rješenje:

Smetnja je dana funkcijom $f(t) = 10 \sin 2t g_{[0,\frac{\pi}{2}]}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{20}{s^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}s}) = F(s)$.
Rješavamo jednadžbu u slici $sY(s) - y(0) + Y(s) = F(s)$ i dobivamo

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \frac{20}{s^2+4}(1 + e^{-\frac{\pi}{2}s}),$$

što rastavljamo na parcijalne razlomke i dobivamo $Y(s) = \left(4\frac{1-s}{s^2+4} + 4\frac{1}{s+1}\right)(1 + e^{-\frac{\pi}{2}s})$. Rješenje dobivamo povratkom u original:

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\ y(t) = (2 \sin 2t - 4 \cos 2t) g_{[0,\frac{\pi}{2}]}(t) + 4e^{-t}(u(t) + e^{\frac{\pi}{2}} u(t - \frac{\pi}{2})).$$

◇

4. (6 bodova) a) Definirajte konvoluciju dviju funkcija.
b) Dokažite da je konvolucija dvaju originala original.
c) Riješite integralnu jednadžbu

$$y(t) = 6t + \int_0^t \sin\tau \cdot y(t-\tau) \mathrm{d}\tau\,.$$

Rješenje:

Konvolucija funkcija f i g je funkcija

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau.$$

Ako su f i g originali, to vrijedi da je $|f(t)| \leq Me^{at}$, $|g(t)| \leq Ne^{bt}$ (za neke konstante $M, N, a, b \in \mathbb{R}$) i $f(t) = g(t) = 0$ (za $t < 0$). Kada je $t < 0$ onda je $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = -\int_t^0 0 \cdot g(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 0$. Za $t \geq 0$ onda vrijedi

$$\begin{aligned} |(f*g)(t)| &= \left| \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) \mathrm{d}\tau \right| \leq \int_0^t |f(\tau)||g(t-\tau)| \mathrm{d}\tau \\ &\leq \int_0^t MNe^{bt-b\tau+a\tau} \mathrm{d}\tau = MNe^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\tau} \mathrm{d}\tau \\ &\leq \frac{MN}{a-b} e^{ct}, \text{ gdje je } c \geq \max\{a, b\}. \end{aligned}$$

Kako je slika konvolucije produkt, to se u slici dana jednadžba pretvara u oblik

$$Y(s) = \frac{6}{s^2} + \frac{Y}{s^2+1},$$

pa je $Y(s) = \frac{6}{s^2} + \frac{6}{s^4} \bullet\!\!-\!\!\circ \frac{6}{1!}t^1 + \frac{6}{3!}t^3 = y(t)$. Rješenje jednadžbe je onda

$$y(t) = 6t + t^3.$$