

## Završni ispit iz Matematike 3E

24.01.2008.

### Pitanja iz 3. ciklusa nastave

#### 1. (3 boda)

Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja  $\mathbf{r} \ln r$  u smjeru vektora  $\mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$  u točki  $T(1, -2, 1)$ .

#### 2. (3 boda)

Izračunajte

$$\int_{\Gamma} y \, ds$$

gdje je  $\Gamma$  dio kardioide  $r = 1 + \cos \varphi$  koji se nalazi u I. kvadrantu.

#### 3. (4 boda)

a) (1b) Iskažite Greenov teorem.

b) (3b) Izračunajte

$$\int_C x^2 y \, dx + (y + xy^2) \, dy$$

pri čemu je  $C$  pozitivno orijentirana krivulja koja je rub područja

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, x \geq y^2\}.$$

#### 4. (4 boda)

a) (2b) Navedite kriterij za potencijalnost vektorskog polja. Dokažite nužnost kriterija.

b) (2b) Provjerite da je polje

$$\mathbf{a} = \frac{1}{x^3} \mathbf{i} + z^2 \mathbf{j} + 2zy \mathbf{k}$$

potencijalno i izračunajte njegov potencijal.

#### 5. (3 boda)

Izračunajte površinu dijela plohe  $z = 2x^2 + 2y^2$  za koju je  $0 \leq z \leq 2$ .

#### 6. (3 boda)

Izračunajte

$$\iint_S z \, dx \, dy - 3 \, dx \, dz$$

gdje je  $S$  dio plohe  $y = x^2$  za koji je  $z \geq 0$  i  $y + z \leq 4$ , a ploha je orijentirana tako da njena normala zatvara s pozitivnim dijelom  $y$ -osi šiljasti kut.

**7. (5 bodova)**

- a) **(2b)** Iskažite i dokažite teorem o divergenciji.  
b) **(3b)** Izračunajte primjenom teorema o divergenciji

$$\iint_{S^+} x \, dy \, dz + y \, dx \, dz + z \, dx \, dy$$

gdje je  $S$  vanjski dio plašta plohe  $x^2 + y^2 = 1$  (ploha nije zatvorena) koji se nalazi između ravnina  $z = 1$  i  $z = 2$ .

**Pitanja iz cijelog gradiva**

**8. (4 boda)**

Izračunajte

$$\iiint_V (x^2 + z^2) \, dx \, dy \, dz$$

pri čemu je  $V$  kugla sa središtem u točki  $S(0, 1, 0)$ , polumjera 2.

**9. (3 boda)**

Razvijte u Fourierov red funkciju  $f(x) = x$  definiranu na intervalu  $[-1, 1]$ .

**10. (3 boda)**

Primjenom Laplaceove transformacije riješite diferencijalnu jednadžbu

$$y' - 2y = f(t), \quad y(0) = 1$$

u kojoj je funkcija  $f$  zadana slikom 1.

**Napomena:** Vrijeme pisanja je **2 sata i 30 minuta**.