Ponovljeni završni ispit iz Matematike 3E
02.02.2009.

Pitanja iz 3. ciklusa nastave

1. (4 boda)
a) (**1b**) Skicirajte plohe $x - 2y = 3$ i $z^2 - y = 1$.
b) (**1b**) Parametrizirajte krivulju zadanu kao presječnica ploha iz zadatka a).
c) (**1b**) Izračunajte vrijednosti parametra t parametrizacije iz zadatka b) koje odgovaraju točkama $A(3, 0, 1)$ i $B(9, 3, 2)$.
d) (**1b**) Neka je $\mathbf{v}(t) = v_1(t)\mathbf{i} + v_2(t)\mathbf{j} + v_3(t)\mathbf{k}$. Dokažite da je $\mathbf{v}'(t) = v_1'(t)\mathbf{i} + v_2'(t)\mathbf{j} + v_3'(t)\mathbf{k}$.

2. (3 boda)
a) (**2b**) Izračunajte
$$\nabla\left(\frac{1}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}}\right),$$
gdje je $\mathbf{r}$ radijvektor i $\mathbf{a}$ konstantni vektor.
b) (**1b**) Izračunajte
$$\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a}),$$
gdje je $\mathbf{a}$ vektorsko polje.

3. (3 boda)
Izračunajte duljinu luka krivulje zadane kao presječnica ploha $x^2 = 3y$ i $2xy = 9z$, između točaka $A(0, y_A, z_A)$ i $B(3, y_B, z_B)$.

4. (5 boda)
a) (**1b**) Iskažite nužan i dovoljan uvijet za potencijalnost vektorskog polja.
b) (**2b**) Ispitajte je li polje
$$\frac{1}{xyz}(yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$$
potencijalno i ako jest izračunajte njegov potencijal.
c) (**2b**) Pomoću polja iz zadatka b) izračunajte krivuljni integral
$$\int_A^B \frac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz},$$
od točke $A(1, 1, 1)$ do točke $B(2, 3, 4)$.

5. (3 boda)
Izračunajte
$$\iint_S dS$$
gdje je S dio plohe $y = x^2 + z^2$ za koji je $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Skicirajte plohu S.

6. (4 boda)
a) (**1b**) Iskažite teorem o divergenciji.
b) (**3b**) Izračunajte tok vektorskog polja $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ kroz vanjski dio zatvorene plohe S koja je rub tijela

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (z-8)^2 \geq x^2 + y^2,\ z \geq 4,\ z \leq 8,\ x \geq 0\right\}.$$

7. (3 boda)
Primjenom Stokesovog teorema izračunajte

$$\oint_C \mathbf{v}\, d\mathbf{r}$$

ako je $\mathbf{v} = -3y\mathbf{i} + 3x\mathbf{j} + z^4\mathbf{k}$, a C je presječnica ploha $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ i $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (pozitivno orijentirana).

Pitanja iz cijelog gradiva

8. (4 boda)
a) (**1b**) Definirajte Fourierov integral funkcije f pomoću sinusnog i kosinusnog spektra.
b) (**3b**) Funkciju $f(x) = e^{-|x|}$ razvijte u Fourierov integral.

9. (4 boda)
a) (**2b**) Po definiciji izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t) = t^n,\ n \in \mathbb{N}$.
b) (**1b**) Kako glasi teorem o pomaku originala.
c) (**1b**) Nađite Laplaceov transformat funkcije $f(t) = (t-1)^2 u(t-1)$.

10. (4 boda)
Skicirajte područje integracije i izračunajte integral

$$\int_0^2 dx \int_0^{2\sqrt{x}} dy \int_0^{\sqrt{(4x-y^2)/2}} x\, dz.$$

11. (3 boda)
a) (**1b**) Izračunajte $\Delta\mathbf{a}$, gdje je $\mathbf{a} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$
b) (**1b**) Definirajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja.
c) (**1b**) Izračunajte usmjerenu derivaciju polja $\mathbf{a}$ iz zadatka a) u smjeru vektora $\mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Napomena: Vrijeme pisanja je **2 sata i 30 minuta**.