Završni ispit iz Matematike 3E
22.01.2009.

Pitanja iz 3. ciklusa nastave

1. (3 boda)
Odredite sve točke na pravcu AB, $A(-1,2,1)$, $B(1,3,2)$, takve da usmjerena derivacija skalarnog polja $f(x,y,z)=\sqrt{2}\cdot z^2-2xy$ u smjeru vektora $\mathbf{s}=\mathbf{i}-\mathbf{j}-\sqrt{2}\cdot\mathbf{k}$ bude jednaka 0.

2. (3 boda)
Izračunajte integral

$$\int_\Gamma \frac{x}{\sqrt[4]{x^2+y^2}}\,ds$$

po krivulji Γ zadanoj u polarnim koordinatama s $r=1+\cos\varphi$, $\varphi\in[0,2\pi]$.

3. (4 boda)
a) (**1b**) Iskažite teorem o Greenovoj formuli.
b) (**3b**) Pomoću Greenove formule izračunajte integral

$$\oint_C (\sin x+y)\,dx+(x^2+\cos y)\,dy$$

pri čemu je C pozitivno orijentirana kružnica radijusa 1 sa središtem u točki $A(0,1)$.

4. (4 boda)
a) (**3b**) Provjerite je li polje $\mathbf{a}=e^{xyz}(yz\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+xy\mathbf{k})$ potencijalno i ako jest odredite njegov potencijal.
b) (**1b**) Izračunajte

$$\int_K a_1(x,y,z)\,dx+a_2(x,y,z)\,dy+a_3(x,y,z)\,dz$$

gdje je $\mathbf{a}(x,y,z)=a_1(x,y,z)\mathbf{i}+a_2(x,y,z)\mathbf{j}+a_3(x,y,z)\mathbf{k}$ iz a), a K je krivulja dobivena presjekom ploha $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+z^2=a^2$, $a>0$ i $x+y=0$, orijetirana u negativnom smjeru gledano iz točke T(1,0,0).

5. (3 boda)
Izračunajte

$$\iint_S (x^2+y^2)\,dS$$

gdje je S dio plohe $z=x^2+y^2$ za koji je $1\le z\le 4$.

6. (4 boda)
a) (**1b**) Iskažite teorem o divergenciji.
b) (**3b**) Izračunajte

$$\iint_S x\,dydz+z\,dxdy$$

po vanjskoj strani plohe S, $x^2+4y^2=1$ za $-1\le z\le 1$ (ploha nije zatvorena).

7. (4 boda)
a) (**1b**) Iskažite Stokesov teorem.
b) (**3b**) Izračunajte

$$\oint_K y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

gdje je K presječnica ploha $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$ i $y+z=0$, orijentirana u pozitivnom smjeru gledano iz točke $T(0,a,0)$.

Pitanja iz cijelog gradiva

8. (3 boda)
a) (**2b**) Napišite Fourierov red za periodičnu funkciju $y=f(x)$ zadanu na intervalu $[0,2\pi]$.
b) (**1b**) Za funkciju $y=x$, $x\in[0,2\pi]$ nacrtajte graf Fourierovog reda.

9. (3 boda)
a) (**1b**) Napišite definiciju Laplaceovog transformata funkcije $f(t)$.
b) (**1b**) Po definiciji izračunajte Laplaceov transformat funkcije $f(t)=e^{\alpha t}$.
c) (**1b**) Za koji $\alpha\in\mathbb{R}$ postoji Laplaceov transformat iz b)?

10. (3 boda)
a) (**1b**) Izračunajte Jacobijan za cilindrične koordinate.
b) (**1b**) Napišite jednadžbu plohe $z=1-x^2-y^2$ u cilindričnim koordinatama.
c) (**1b**) Skicirajte plohu $z=1-x^2-y^2$.

11. (3 boda)
Izračunajte integral

$$\iiint_V z\,dxdydz$$

pri čemu je V tijelo omeđeno plohama $z^2=x^2+y^2$, $z=2$.

12. (3 boda) Definirajte sljedeće pojmove i napišite za kakva polja su definirani.
a) (**1b**) gradijent
b) (**1b**) divergencija
c) (**1b**) rotor

Napomena: Vrijeme pisanja je **2 sata i 30 minuta**.