Ponovljeni završni ispit iz Matematike 3E
04.02.2010.

Pitanja iz 3. ciklusa nastave (25 bodova)

1. (5 bodova)
a) (**2b**) Izračunajte
$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{s}}$$
ako je $\mathbf{v}(x, y, z) = xyz\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + y^2z\mathbf{k}$, te $\mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.
b) (**1b**) Pokažite da je $\operatorname{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 0$, pri čemu je **a** konstantni vektor, te **r** radij-vektor.
c) (**2b**) Izračunajte
$$\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{r}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}\right),$$
pri čemu je **a** konstantni vektor, te **r** radij-vektor.

2. (4 boda)
Izračunajte duljinu onog dijela krivulje $r = |2 \sin \varphi|$ za kojeg je $r \leq \sqrt{3}$.

3. (3 boda)
Postoji li derivabilna realna funkcija $f(z)$ takva da je polje
$$\mathbf{v}(x, y, z) = yf(z)\mathbf{i} + xf(z)\mathbf{j} + xy(3z^2 - 1)\mathbf{k}$$
potencijalno? Ako postoji, odredite $f(z)$.

4. (3 boda)
a) (**1b**) Iskažite Greenov teorem.
b) (**2b**) Izračunajte
$$\oint_\Gamma y\,dx + x\,dy$$
ako je Γ pozitivno orijentirana elipsa
$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

5. (5 bodova)
Pomoću Stokesove formule izračunajte
$$\oint_\Gamma x^4\,dx + 2y\,dy + xyz\,dz$$
pri čemu je krivulja Γ zadana kao presjek ploha $x^2 + 2y^2 = 4$ i $y = z$, a orijentirana je pozitivno gledajući iz točke $(0, 0, 10)$.

6. (5 bodova)
Izračunajte
$$\iint_S xy\,dxdy + y\,dxdz + x\,dydz$$
pri čemu je S dio plohe $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ za koji je $z \leq 2$. Ploha S je orijentirana tako da vektor smjera njene jedinične normale zatvara tupi kut s pozitivnim dijelom osi z.

Pitanja iz cijelog gradiva (15 bodova)

7. (4 boda)
Funkciju $f(x) = x$ definiranu na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ razvijte u Fourierov red po kosinus funkcijama.

8. (4 boda)
a) (**1b**) Definirajte Laplaceovu transformaciju $\mathscr{L}(f)$ originala $f(t)$.
b) (**3b**) Koristeći definiciju Laplaceove transformacije izračunajte $\mathscr{L}\left(e^{-2t}\right)$. Za koje $s \in \mathbb{R}$ postoji $\mathscr{L}\left(e^{-2t}\right)$?

9. (4 boda)
a) (**1b**) Definirajte plošni integral skalarnog polja $f(x, y, z)$ po plohi S koja je eksplicitno zadana jednadžbom $z = g(x, y)$.
b) (**3b**) Izračunajte plošni integral skalarnog polja $f(x, y) = x^2 + y^2$ po polusferi S koja je definirana s $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.

10. (3 boda)
Odredite jednadžbu tangente na krivulju

$$x(t) = \cos(2t), \quad y(t) = \sin(2t), \quad z(t) = t$$

u točki $T(1, 0, 4\pi)$.

Napomena: Vrijeme pisanja je **2 sata i 30 minuta**.