Završni ispit iz Matematike 3E
27.01.2010.

Pitanja iz 3. ciklusa nastave (25 bodova)

1. (6 bodova)
Neka je zadan radij-vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, te neka je $r = |\mathbf{r}|$.
a) (**1b**) Izračunajte usmjerenu derivaciju radij-vektora $\mathbf{r}$ u smjeru zadanog vektora $\mathbf{s} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.
b) (**3b**) Izračunajte Δr.
c) (**2b**) Pokažite da je $\operatorname{rot}(r\mathbf{r}) = \mathbf{0}$.

2. (7 bodova)
a) (**2b**) Pokažite da krivuljni integral potencijalnog vektorskog polja $\mathbf{v} \in C(\mathbb{R}^3)$ ne ovisi o putu integracije.
b) (**1b**) Pokažite da za potencijalno vektorsko polje $\mathbf{v} \in C^2(\mathbb{R}^3)$ vrijedi $\operatorname{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
c) (**3b**) Provjerite je li polje $\mathbf{v}(x, y, z) = e^{xy+z}\,(y^2\mathbf{i} + (1 + xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k})$ potencijalno te ako jest, odredite njegov potencijal.
d) (**1b**) Izračunajte krivuljni integral vektorskog polja $\mathbf{v}$ iz c) dijela zadatka duž proizvoljno odabrane krivulje od točke $A(0, 1, \pi/2)$ do točke $B(1, 0, 2\pi)$.

3. (3 boda)
Izračunajte
$$\int_\Gamma y\,ds$$
gdje je Γ luk parabole $y^2 = 4x$ od ishodišta do točke $A\left(2, 2\sqrt{2}\right)$.

4. (4 boda)
Zadano je vektorsko polje $\mathbf{a}(x, y, z) = -y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Pomoću Stokesovog teorema izračunajte integral
$$\iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{a}) \cdot \mathbf{n}\,dS$$
gdje je S polusfera zadana sa $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z \geq 0$, te $\mathbf{n}$ jedinična normala na S koja zatvara šiljasti kut s pozitivnim dijelom osi z.

5. (5 bodova)
Izračunajte
$$\iint_S x\,dydz + y\,dxdy$$
gdje je S dio plohe $x = 2y^2 + z^2$ omeđen ravninom $x = 2$ (ploha nije zatvorena). Ploha S je orijentirana tako da vektor smjera njene normale zatvara tupi kut s pozitivnim dijelom osi x.

Pitanja iz cijelog gradiva (15 bodova)

6. (4 boda)
Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} -1\,, & -\pi < x < 0, \\ 1\,, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

perioda 2π razvijte u Fourierov red. Skicirajte graf dobivenog reda.

7. (3 boda)
Odredite Laplaceovu transformaciju funkcije

$$f(t) = \begin{cases} \sin t\,, & 0 \le t \le \pi, \\ 0\,, & \text{inače.} \end{cases}$$

8. (4 boda)
a) (**1b**) U $\mathbb{R}^3$ uvedite cilindrični koordinatni sustav.
b) (**3b**) Izračunajte integral

$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int_0^3 dz.$$

9. (3 boda)
Izračunajte površinu dijela plohe $z = \sqrt{x^2+y^2}$ koji se nalazi između ravnina $z = 1$ i $z = 2$.

10. (1 bod)
Iskažite teorem o divergenciji.

Napomena: Vrijeme pisanja je **2 sata i 30 minuta**.