

Drugi međuispit iz Matematike 3E

02.12.2010.

1. (3 boda) Napišite i dokažite teorem srednje vrijednosti integralnog računa za dvostruki integral.

2. (4 boda) Prelaskom na polarne koordinate izračunajte

$$\iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{1-x^2-y^2}},$$

gdje je $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq x, x^2 + y^2 \leq y\}$.

3. (4 boda) U dvostrukom integralu

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^{2/3}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{1+\sqrt{4x-x^2-3}} f(x, y) dy,$$

promijenite poredak integracije i skicirajte područje integracije.

4. (4 boda) Izračunajte

$$\iiint_V e^{x+y+z} dx dy dz,$$

gdje je V tetraedar određen vrhovima $A(0, 0, 0), B(0, 0, 2), C(1, 0, 2), D(0, 1, 2)$.

5. (3 boda) Izračunajte Jacobijan za koordinate zadane s

$$\begin{aligned} x &= r \cdot t \\ y &= \frac{1}{2}(t^2 - r^2) \\ z &= z \end{aligned}$$

Napišite izraz za računanje volumena tijela V u koordinatnom sustavu (x, y, z) i u koordinatnom sustavu (r, t, z) .

6. (4 boda) Prelaskom na sferne koordinate izračunajte

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2-x^2-y^2}} z^2 dz.$$

Skicirajte područje integracije u pravokutnim koordinatama.

7. (3 boda)

a) Napišite jednadžbu tangente na krivulju C zadanu s

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t), \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

u točki $T_0 \in C$ za koju je $t = t_0$.

b) Izračunajte vektor smjera tangente na krivulju Γ zadanu s

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4-4t^2} \\ y &= t \\ z &= 1-t, \quad t \in [-1, 1] \end{aligned}$$

u točki $T_0 \in \Gamma$ za koju je $t = 0$.