Ponovljeni završni ispit iz Matematike 3E
28.01.2011.

Pitanja iz 3. ciklusa nastave (25 bodova)

1. (3 boda)
Neka je zadano vektorsko polje $\mathbf{a}(x, y, z) = y^3 z\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + xz^2\mathbf{k}$. Odredite parametarski zapis krivulje u prostoru u čijoj svakoj točki $S(x, y, z)$ vrijedi $(\operatorname{rot}\mathbf{a})|_S = \mathbf{0}$, te odredite sve plohe u čijim svim točkama $T(x, y, z)$ vrijedi $(\operatorname{div}\mathbf{a})|_T = 0$.

2. (2 boda)
a) (**1b**) Definirajte Δf gdje je $f = f(x, y, z)$ dva puta diferencijabilno skalarno polje.
b) (**1b**) Dokažite da je $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$.

3. (5 bodova)
Dokažite da je vektorsko polje $\mathbf{g}(x, y, z) = x\mathbf{i} - y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ potencijalno, te izračunajte njegov potencijal. Izračunajte integral

$$\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x\,dx - y^2\,dy + z\,dz.$$

4. (4 boda)
Izračunajte integral

$$\int_C \sqrt{xy - z^2 + 1}\,ds,$$

pri čemu je C kružnica nastala presjekom sfere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ i ravnine $y = 2x$.

5. (3 boda)
Izračunajte integral

$$\iint_\Sigma 3x\,dS,$$

gdje je Σ dio ravnine $x + 2y + 3z = 6$ za koji je $x \geq 0$, $y \geq 0$ i $z \geq 0$.

6. (5 bodova)
Primjenom teorema o divergenciji izračunajte tok vektorskog polja $\mathbf{h} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ kroz vanjski dio plohe S. Ploha S je dio plašta stošca $z^2 = x^2 + y^2$ za koji je $2 \leq z \leq 4$ i $x \geq 0$.

7. (3 boda)
Primjenom Stokesove formule izračunajte tok vektorskog polja

$$\mathbf{s}(x, y, z) = \operatorname{rot}\left(xz\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}\right)$$

kroz vanjsku stranu plašta stošca $(z-4)^2 = 4(x+1)^2 + 4y^2$, $0 \leq z \leq 4$.

Pitanja iz cijelog gradiva (15 bodova)

8. (5 bodova)
a) (**3b**) Funkciju $f(x) = -x$ definiranu na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ razvijte u Fourierov red po sinus funkcijama.
b) (**2b**) Dokažite ortogonalnost funkcija

$$g(x) = \sin(nx), \quad n = 0, 1, \dots$$

na intervalu $[-\pi, \pi]$.

9. (5 bodova)
a) (**1b**) Koristeći definiciju Laplaceove transformacije izračunajte

$$\int_0^\infty e^{-3t} \cos(5t)\, dt.$$

b) (**2b**) Definirajte original.
c) (**2b**) Odredite original funkcije

$$F(s) = \frac{e^{-6s}}{(s-1)^3}.$$

10. (2 boda)
Definirajte kosinusni i sinusni spektar funkcije f za Fourierov integral.

11. (3 boda)
a) (**1b**) Definirajte derivaciju vektorske funkcije $\mathbf{r}(t)$ u točki t_0.
b) (**1b**) Definirajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja $\mathbf{a}(x, y, z)$ u smjeru vektora $\mathbf{b}$ u točki $T(x_0, y_0, z_0)$.
c) (**1b**) Izračunajte $\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{b}}$, gdje su $\mathbf{b} = \mathbf{i}$, $\mathbf{a} = \mathbf{r}$, a $\mathbf{r}$ je radijvektor.

Napomena: Vrijeme pisanja je **2 sata i 30 minuta**.