Završni ispit iz Matematike 3E
20.01.2011.

Pitanja iz 3. ciklusa nastave (25 bodova)

1. (5 bodova)
a) (**1b**) Odredite usmjerenu derivaciju polja $\varphi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ u smjeru vektora $\mathbf{s} = \mathbf{i}+\mathbf{j}$ u točki $T(1,1)$.
b) (**3b**) Dokažite da za derivabilnu funkciju $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vrijedi

$$\operatorname{div}\left[F(r)\mathbf{r}\right] = F'(r)r + 3F(r),$$

pri čemu je $\mathbf{r}$ radijvektor, a $r = \|\mathbf{r}\|$.
c) (**1b**) Izračunajte

$$\operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{r^3}+1\right)\mathbf{r}\right].$$

2. (5 bodova)
Zadano je vektorsko polje

$$\mathbf{a}(x,y,z) = \sin(y)\mathbf{i} + (x\cos y + \sin z)\mathbf{j} + y\cos(z)\mathbf{k}.$$

a) (**1b**) Pokažite da je vektorsko polje $\mathbf{a}$ potencijalno.
b) (**2b**) Odredite potencijal vektorskog polja $\mathbf{a}$.
c) (**2b**) Izračunajte rad vektorskog polja $\mathbf{a}$ duž proizvoljne krivulje koja spaja točke $A(0,0,0)$ i $B\left(5, \frac{\pi}{2}, 3\pi\right)$.

3. (3 boda)
Izračunajte integral

$$\int_K xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz,$$

duž krivulje K zadane kao presjek ploha $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $R > 0$ i $z = x$ za $y \geq 0$, od točke $M(0,R,0)$ do točke $N(\frac{R}{\sqrt{2}}, 0, \frac{R}{\sqrt{2}})$.

4. (5 bodova)
Pomoću teorema o divergenciji izračunajte integral

$$\iint_S x^2\,dydz + z\,dxdy,$$

gdje je S vanjska strana dijela plohe $4x^2+y^2 = 1$ za koji je $0 \leq z \leq 2$.

5. (7 bodova)
a) (**2b**) Iskažite Stokesov teorem.
b) (**5b**) Primjenom Stokesovog teorema izračunajte integral vektorskog polja $\mathbf{b}(x,y,z) = x\mathbf{i}+xz\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ duž ruba krivulje Γ. Krivulja Γ je rub trokuta određenog točkama $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$ i $C(0,0,2)$, a orijentirana je pozitivno, gledajući iz točke $(10,10,10)$.

Pitanja iz cijelog gradiva (15 bodova)

6. (5 bodova)
a) (**1b**) Napišite Dirichletove uvjete.
b) (**2b**) Iskažite teorem o konvergenciji Fourierovog reda.
c) (**2b**) Funkciju

$$f(x) = \cos^2(2x)$$

perioda $T = \pi$ razvijte u Fourierov red.

7. (5 bodova)
a) (**1b**) Definirajte Laplaceovu transformaciju funkcije f.
b) (**2b**) Definirajte original.
c) (**2b**) Nađite original funkcije

$$F(s) = \frac{3e^{-3s}}{s\,(s^2+1)}.$$

8. (5 bodova)
a) (**2b**) Definirajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja $\mathbf{f}(x, y, z)$ u smjeru vektora $\mathbf{s}$ u točki $T(x_0, y_0, z_0)$.
b) (**3b**) Odredite parametrizaciju krivulje za koju u svakoj njenoj točki $T(x, y, z)$ vrijedi

$$\left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{b}}\right|_T = 3\sqrt{3}\mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{k},$$

gdje je vektorsko polje $\mathbf{g}(x, y, z) = (x^3 - y^3)\mathbf{i} + (x + y)\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$, a vektor $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Napomena: Vrijeme pisanja je **2 sata i 30 minuta**.