

1. međuispit iz Matematike 3E
23.11.2011.

1. (5 bodova)

(a)(2 boda) Iskažite Dirichletove uvjete za funkciju f na intervalu $[a, b]$.

(b)(2 boda) Iskažite (bez dokaza) Teorem o konvergenciji Fourierovog reda periodične funkcije s periodom 2π .

(c)(1 bod) Funkcija f zadana sa

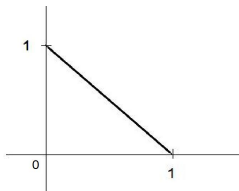
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x \in [0, \pi) \end{cases}$$

razvijena je u Fourierov red $S(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$.

Odredite $S(2011 \cdot \pi)$.

2. (5 bodova)

(a)(3 boda) Parno proširenje funkcije zadane na $(0, 1]$ slikom



razvijte u Fourierov red.

(b)(1 bod) Iskažite Parsevalovu jednakost za periodičnu funkciju perioda T .

(c)(1 bod) Izračunajte sumu reda

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

3. (5 bodova)

Zadana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(a)(3 boda) Prikažite funkciju $f(x)$ pomoću Fourierovog integrala.

(b)(1 bod) Izračunajte amplitudni spektar funkcije $f(x)$.

(c)(1 bod) Nacrtajte graf dobivenog integrala na čitavoj domeni.

4. (5 bodova)

(a)(1 bod) Definirajte Laplaceov transformat funkcije f .

(b)(2 boda) Koristeći definiciju, izračunajte $\mathcal{L}(e^{\alpha t})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Detaljno obrazložite za koje $s \in \mathbb{R}$ integral konvergira.

(c)(2 boda) Koristeći (b) dio zadatka, izvedite Laplaceove transformate funkcija $\text{sh}(\omega t)$ i $\text{ch}(\omega t)$, $\omega \in \mathbb{R}$.

5. (5 bodova)

(a)(1 bod) Definirajte konvoluciju originala.

(b)(1 bod) Iskažite Teorem o konvoluciji originala.

(c)(3 boda) Riješite sljedeći Cauchyjev problem:

$$y''(t) + 2y'(t) + 5y(t) = f(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -2,$$

pri čemu je $f(t)$ proizvoljni original.

6. (5 bodova)

Odredite original funkcije

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}.$$

7. (5 bodova)

Zamijenite redoslijed integracije i skicirajte područje integracije u integralu

$$\int_0^1 dx \int_{e^{-x}}^{e^x} f(x, y) dy.$$

8. (5 bodova)

Izračunajte integral

$$\iint_D y \, dx \, dy,$$

gdje je D područje sadržano u krugu $(x-1)^2 + y^2 = 1$, a između pravaca $y = x$ i $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$.