Završni ispit iz Matematike 3E
01.02.2012.

1. (6 bodova)
a) (**2b**) Izračunajte Jacobijan za zamjenu varijabli u trostrukom integralu zadanu sa:

$$\begin{aligned} x(\varphi,\theta,r) &= r\cos\theta\sin\varphi \\ y(\varphi,\theta,r) &= r\cos\theta\cos\varphi \\ z(\varphi,\theta,r) &= r. \end{aligned}$$

b) (**4b**) Izračunajte volumen tijela omeđenog plohama $y = 4 - x^2 - z^2$ i $y = z + 2$.

2. (5 bodova)
Zadano je vektorsko polje

$$\mathbf{f}(x,y,z) = yz(2x+y+z)\mathbf{i} + xz(x+2y+z)\mathbf{j} + xy(x+y+2z)\mathbf{k}.$$

a) (**2b**) Odredite je li vektorsko polje $\mathbf{f}$ potencijalno.
b) (**1b**) Odredite potencijal vektorskog polja $\mathbf{f}$.
c) (**1b**) Izračunajte integral

$$\int_{(-1,1,-2)}^{(2,3,1)} yz(2x+y+z)\,dx + xz(x+2y+z)\,dy + xy(x+y+2z)\,dz.$$

d) (**1b**) Izračunajte integral

$$\oint_K \mathbf{f}\cdot d\mathbf{r},$$

gdje je K zatvorena krivulja dana kao presjek ploha $x^4 + y^4 = z$ i $x + y - z = -1$, negativno orijentirana gledano iz točke $N(0,0,10)$.

3. (5 bodova)
Neka su $\mathbf{r}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ radijvektor, $r = \|\mathbf{r}\|$, $\mathbf{a}$ konstantan vektor, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ proizvoljna glatka funkcija i $\mathbf{g}(x,y,z) = x^2 z\,\mathbf{i} + y\cos z\,\mathbf{j}$.
Izračunajte:
a) (**2b**) $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r})$.
b) (**1b**) $\nabla \cdot (f(r)\mathbf{r})$.
c) (**2b**) $\Delta\mathbf{g}$.

4. (4 boda)
a) (**1b**) Definirajte usmjerenu derivaciju glatkog vektorskog polja $\mathbf{f}(x,y,z)$ u smjeru vektora $\mathbf{s}$ u točki $T(x_0,y_0,z_0)$.
b) (**3b**) Odredite sve točke $T(x,y,z)$ tako da vrijedi

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial\mathbf{s}}|_T = \mathbf{b},$$

gdje su $\mathbf{v}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + xyz\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$, $\mathbf{s} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ i $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 2\sqrt{3}\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

5. (5 bodova)
Izračunajte integral

$$\int_\Gamma \sqrt{\frac{1}{2} - 3yz}\,ds,$$

gdje je krivulja Γ presjek elipsoida $(x-1)^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$ i ravnine $z = -y$.

6. (9 bodova)
a) (**2b**) Iskažite teorem o divergenciji.
b) (**4b**) Koristeći teorem o divergenciji izračunajte integral

$$\oiint_{\Sigma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S},$$

gdje je $\mathbf{a}(x, y, z) = \frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{2}z^2\mathbf{k}$, a Σ je vanjska strana **zatvorene** plohe koja je rub tijela zadanog nejednakostima $z \geq 0$ i $z \leq 1 - x^2 - y^2$.
c) (**3b**) Izračunajte direktno (bez korištenja teorema o divergenciji) integral

$$\oiint_{\Sigma} x\, dydz + y\, dxdz,$$

gdje je Σ **zatvorena** ploha iz b) dijela zadatka.

7. (6 bodova)
a) (**2b**) Iskažite Stokesov teorem.
b) (**4b**) Izračunajte integral

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r},$$

gdje je $\mathbf{a}(x, y, z) = (x - z)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k}$, a krivulja C je zadana kao presjek ploha $x^2 + y^2 = 1$ i $x + z = 1$, te je negativno orijentirana, gledano iz točke $O(0, 0, 0)$.

Napomena: Vrijeme pisanja je **2 sata**.