

Zimski ispitni rok iz Matematike 3E
15.02.2012.

1. (7 bodova)

(a)(2 boda) Iskažite osnovni teorem o Fourierovom redu.

(b)(5 bodova) Funkciju

$$f(x) = x \sin 4x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

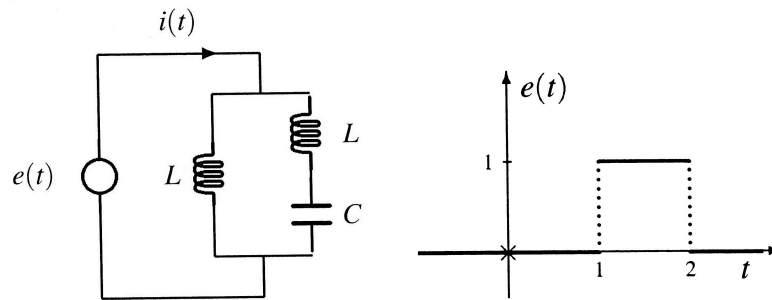
prikažite pomoću razvoja u Fourierov red.

2. (8 bodova)

(a)(1 bod) Definirajte Laplaceov transformat $\mathcal{L}(f)$ funkcije f .

(b)(2 boda) Neka je funkcija f dva puta diferencijabilna i original. Pomoću definicije iz (a) dijela zadatka izvedite izraz za $\mathcal{L}(f'')$.

(c)(5 bodova) Primjenom Laplaceove transformacije odredite struju $i(t)$ strujnog kruga na slici uz zadani napon $e(t)$. ($L = 1, C = 1$)



3. (4 boda)

Izračunajte volumen tijela omeđenog plohami $z = 6 - x^2 - y^2$ i $z^2 = x^2 + y^2$ uz uvjet $z \geq 0$.

4. (6 bodova)

Neka je $\varphi(x, y, z)$ glatko skalarno polje, a $\mathbf{v}(x, y, z)$ glatko vektorsko polje.

(a)(1 bod) Definirajte grad φ .

(b)(1 bod) Definirajte $\operatorname{div} \mathbf{v}$.

(c)(1 bod) Definirajte $\operatorname{rot} \mathbf{v}$.

(d)(3 boda) Neka je $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, a $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ radijvektor. Izračunajte usmjerenu derivaciju vektorskog polja

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}$$

u smjeru vektora \mathbf{a} u točki $T(1, 1, -1)$.

5. (5 bodova)

(a)(1 bod) Iskažite Greenov teorem.

(b)(4 boda) Koristeći Greenov teorem izračunajte integral

$$\oint_{\Gamma} (e^x - y^3) dx + (\cos y + x^3) dy,$$

gdje je **zativorena** krivulja Γ unija dijela jedinične kružnice s centrom u ishodištu za koji dio je $x \geq 0$ i dužine \overline{AB} od točke $A(0, 1)$ do točke $B(0, -1)$. Krivulja Γ je pozitivno orijentirana.

6. (4 boda)

Izračunajte duljinu luka **zativorene** krivulje koja je zadana kao presječnica ploha $x^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 1$ i $(x + 1)^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7. (6 bodova)

Izračunajte integral

$$\iint_{\Sigma} x^2 dydz + y^2 dx dz + z^2 dx dy$$

gdje je Σ dio plohe $4x^2 + y^2 + z^2 = 4$ za koji je $z \geq 1$. Ploha Σ je orijentirana tako da vektor smjera njene jedinične normale zatvara šiljasti kut s pozitivnim dijelom osi z .

Napomena: Vrijeme pisanja je **2 sata i 30 minuta**. Dozvoljeno je koristiti samo prazne papire, pribor za pisanje i službeni podsjetnik.