Međuispit

8. svibnja 2012.

Ime i Prezime: **Matični broj:**

Napomena: Zadatke obavezno predati s rješenjima nakon završetka testa.

1. zadatak (4 boda)

Zadana je nelinearna diferencijalna jednadžba

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2.$$

a) *(2 boda)* Korištenjem postupka separacije varijabli odredite rješenje $x(t)$ uz početni uvjet x_0.

b) *(2 boda)* Skicirajte odziv $x(t)$ uz početni uvjet $x_0 = 0.5$ i napišite kako se naziva ova pojava.

2. zadatak (10 bodova)

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x\,(y-1) \\ \dot{y} &= 4 - x^2 - y^2. \end{aligned}$$

a) *(4 boda)* Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

b) *(0.5 boda)* Odredite jednažbu izoklina u obliku $m = f\,(x, y)$.

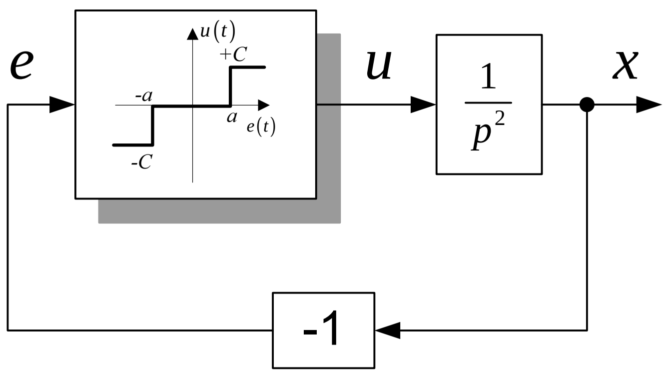
c) *(3 boda)* Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

d) *(1.5 boda)* Skicirajte trajektoriju sustava, njezin smjer te početni nagib uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $y(0) = 3$ ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.

e) *(1 bod)* Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $y(0) = 2$.

3. zadatak (7 bodova)

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 1.



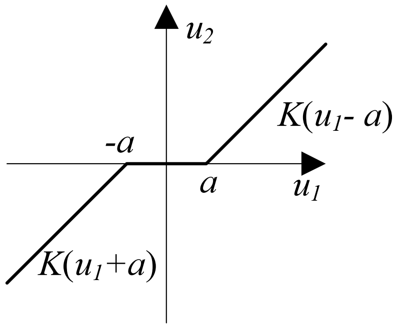
Slika 1: Zatvoreni krug upravljanja.

a) *(4 boda)* Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

b) *(3 boda)* Uz parametre sustava $C = 1.5$, $a = 3$ i početne uvjete $x(0) = 4$ i $\dot{x}(0) = 1$, izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini x–$\dot{x}$. *Napomena:* Obavezno označiti smjer trajektorije i napisati kako je određen!

4. zadatak (5 bodova)

Na slici 2 prikazan je nelinearni element zona neosjetljivosti. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $u_1(t) = X_m \sin(\omega t)$ gdje je $X_m > a$.



Slika 2: Zona neosjetljivosti.

a) *(1 bod)* Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $u_2(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke.

b) *(4 boda)* Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$.

Napomena: $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ i $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

RJEŠENJA:

Zadatak 1

Zadana je nelinearna diferencijalna jednadžba

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x^2.$$

a) *(2 boda)* Korištenjem postupka separacije varijabli odredite rješenje $x(t)$ uz početni uvjet x_0.

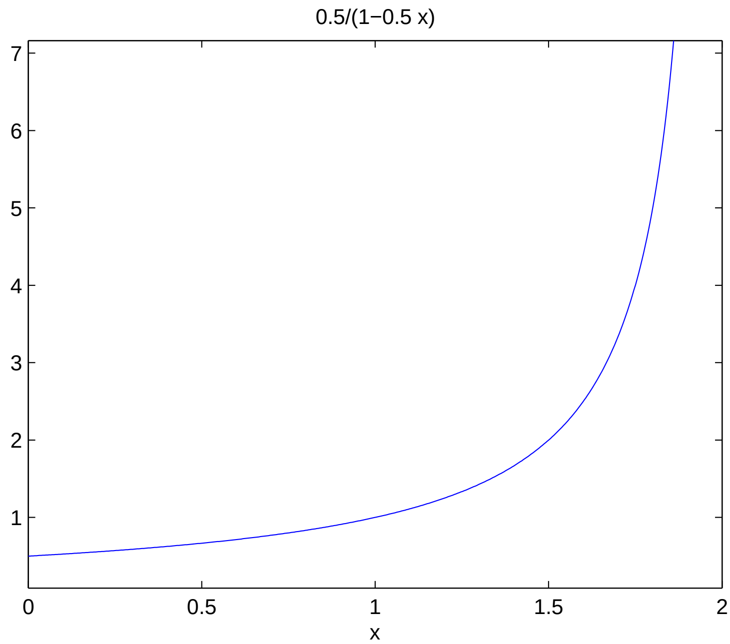
$$\frac{dx}{dt} = x^2$$
$$\frac{dx}{x^2} = dt / \int$$
$$-\frac{1}{x} + C = t$$
$$x = \frac{1}{C-t}$$

$$t = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{x_0}$$

$$\boxed{x\left(t\right) = \frac{x_0}{1-x_0 t}}$$

b) *(2 boda)* Skicirajte odziv $x(t)$ uz početni uvjet $x_0 = 0.5$ i napišite kako se naziva ova pojava.

Pojava se naziva vrijeme konačnog pobjega (finite time escape) i prikazan je slikom 3.



Slika 3: Finite time escape.

Zadatak 2

Zadan je nelinearni sustav opisan diferencijalnim jednadžbama:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x\left(y-1\right)\\ \dot{y} &= 4-x^2-y^2.\end{aligned}$$

a) *(4 boda)* Odredite ravnotežna stanja sustava i njihov tip.

Ravnotežna stanja se dobiju izjednačavanjem derivacija s 0:

$$\begin{aligned} 0 &= x(y-1) \\ 0 &= 4-x^2-y^2. \end{aligned}$$

iz čega slijedi:

I. $(0,2)$

II. $(0,-2)$

III. $(\sqrt{3},1)$

IV. $(-\sqrt{3},1)$

linearizacijom se dobije:

$$\begin{aligned} \Delta\dot{x} &= (y_0-1)\Delta x + x_0\Delta y \\ \Delta\dot{y} &= -2x_0\Delta x - 2y_0\Delta y \end{aligned}$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x} \\ \Delta\dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0-1 & x_0 \\ -2x_0 & -2y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

Za svaku ravntežnu točku se može napisati:

I. $(0,2)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -4 \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$

II. $(0,-2)$ $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -3, \lambda_2 = 4 \Rightarrow \boxed{\textbf{sedlo}}$

III. $(\sqrt{3},1)$

$$\begin{aligned} &\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \\ &\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}) = \lambda(\lambda+2)+6 = \lambda^2+2\lambda+6 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\textbf{stabilan fokus}}$

IV. $(\sqrt{3},1)$

$$\begin{aligned} &\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} \\ &\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{J}) = \lambda(\lambda+2)+6 = \lambda^2+2\lambda+6 = 0 \\ &\Rightarrow \lambda_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{5} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \boxed{\textbf{stabilan fokus}}$

b) *(0.5 boda)* Odredite jednažbu izoklina u obliku $m = f(x,y)$.

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4-x^2-y^2}{x(y-1)}$$

gdje je m nagib trajektorije na izoklini.

c) *(3 boda)* Odredite, uredno nacrtajte i precizno označite područja u faznoj ravnini x–y gdje je nagib trajektorije jednak 0, jednak ∞, pozitivan i negativan.

- jednak 0,
  Nagib je 0 na kružnici $x^2 + y^2 = 4$.
  $\boxed{m = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4}$

- jednak ∞,
  Nagib je ∞ na $x = 0$ ili $y = 1$.
  $\boxed{m = \infty \Rightarrow y = 1 \vee x = 0}$

- pozitivan i

- negativan.
  Iz jednadžbe izoklina slijede sljedeći uvjeti za smjer od m

Tablica 1: Tablica uz rješenje Zadatka 3.

	$4 - x^2 - y^2$	x	$y - 1$	m
1	> 0	> 0	> 0	> 0
2	> 0	> 0	< 0	< 0
3	> 0	< 0	> 0	< 0
4	> 0	< 0	< 0	> 0
5	< 0	> 0	> 0	< 0
6	< 0	> 0	< 0	> 0
7	< 0	< 0	> 0	> 0
8	< 0	< 0	< 0	< 0

Skicirana područja su na slici 4.

d) *(1.5 boda)* Skicirajte trajektoriju sustava, njezin smjer te početni nagib uz početne uvjete $x(0) = 2$ i $y(0) = 3$ ako se zna da trajektorija završava u najbližem ravnotežnom stanju.

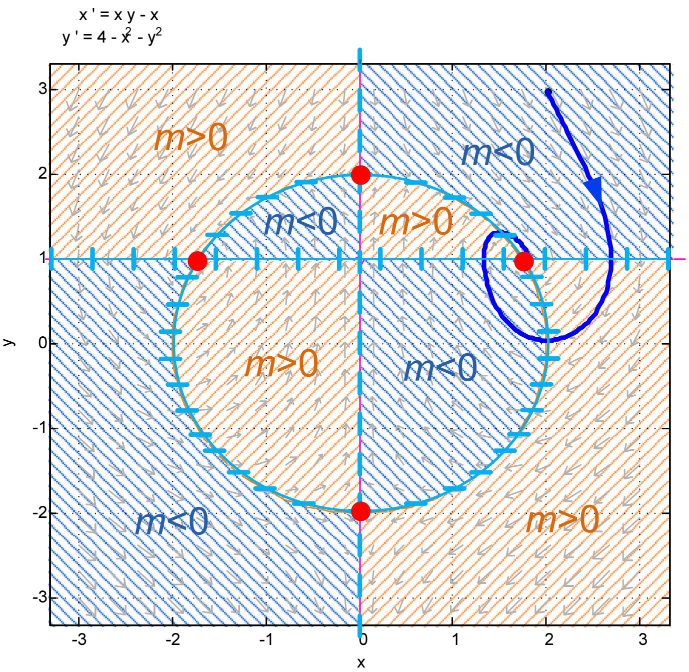
   Potrebno je izračunati nagib trajektorije u početnom uvjetu.

$$m = \frac{-9}{4} = \tan\alpha$$
$$\alpha = \operatorname{atan2}(-9, 4) = -66°$$

   Iz ovoga slijedi da je početni nagib takav da trajektorije kreće dolje desno. S obzirom da trajektorija završava u stabilnoj ravnotežnoj točki tipa fokus, ona spiralno ide u ravnotežnu točku. Nije točno ako se nacrta da trajektorija ide direktno u ravnotežnu točku. Rješenje je prikazano slikom 4.

e) *(1 bod)* Skicirajte trajektoriju sustava i njezin smjer uz početne uvjete $x(0) = 0$ i $y(0) = 2$.

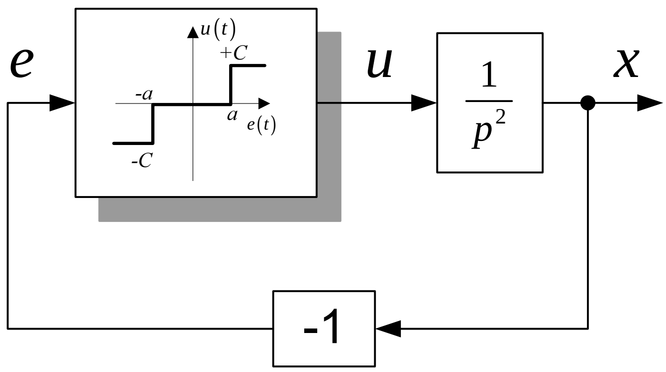
   Početni uvjet je ujedno i ravnotežna točka tipa sedlo. Ovo je nestabilna ravnotežna točka ali s obzirom da je sustav autonoman, stanje će se zadržati u ovoj točki. Drugim riječima, trajektorija počinje, ostaje i završava u ovoj točki.



Slika 4: Horizontalne plave crtice označavaju nagib 0 a vertikalne nagib ∞. Narančasto iscrtkana područja su područja s pozitivnim nagibom trajektorije, a plavo iscrtkana područja s negativnim nagibom trajektorije.

Zadatak 3

Zadan je zatvoreni krug upravljanja prikazan slikom 5.



Slika 5: Zatvoreni krug upravljanja.

a) *(4 boda)* Napišite jednadžbe koje u potpunosti opisuju trajektoriju stanja zatvorenog kruga upravljanja.

$$x = \frac{1}{s^2}u \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = u$$

$$y = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = u$$

$$\frac{dy}{dt}y\frac{dt}{dx} = u$$

$$ydy = udx$$
$$y^2 = 2\int udx + const.$$

I. latica

$$e < -a \Rightarrow x > a \Rightarrow u = -C$$
$$y^2 = -2Cx + const$$

II. latica

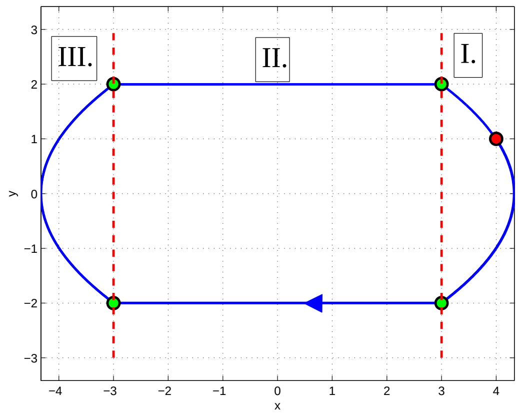
$$|e| < a \Rightarrow |x| < a \Rightarrow u = 0$$
$$y^2 = const$$

III. latica

$$e > a \Rightarrow x < -a \Rightarrow u = C$$
$$y^2 = 2Cx + const$$

b) *(3 boda)* Uz parametre sustava $C = 1.5$, $a = 3$ i početne uvjete $x(0) = 4$ i $\dot{x}(0) = 1$, izračunajte sve karakteristične točke trajektorije stanja i skicirajte ju u faznoj ravnini x–$\dot{x}$. *Napomena:* Obavezno označiti smjer trajektorije i napisati kako je određen!

korak	x_0	y_0	latica	const.	jednadžba	$x_{krajnje}$	$y_{krajnje}$
1.	4	1	I.	7	$y^2 = -3x + 13$	3	± 2
2.	3	± 2	II.	4	$y^2 = 4$	-3	∓ 2
3.	-3	∓ 2	III.	13	$y^2 = 3x + 13$	-3	± 2



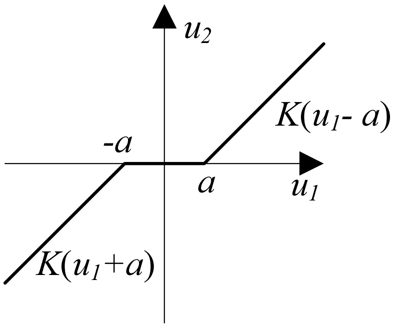
Slika 6: Trajektorija uz zadatak.

Smjer se može odrediti tako da se izračuna kut trajektorije u zadanom početnom trenutku.

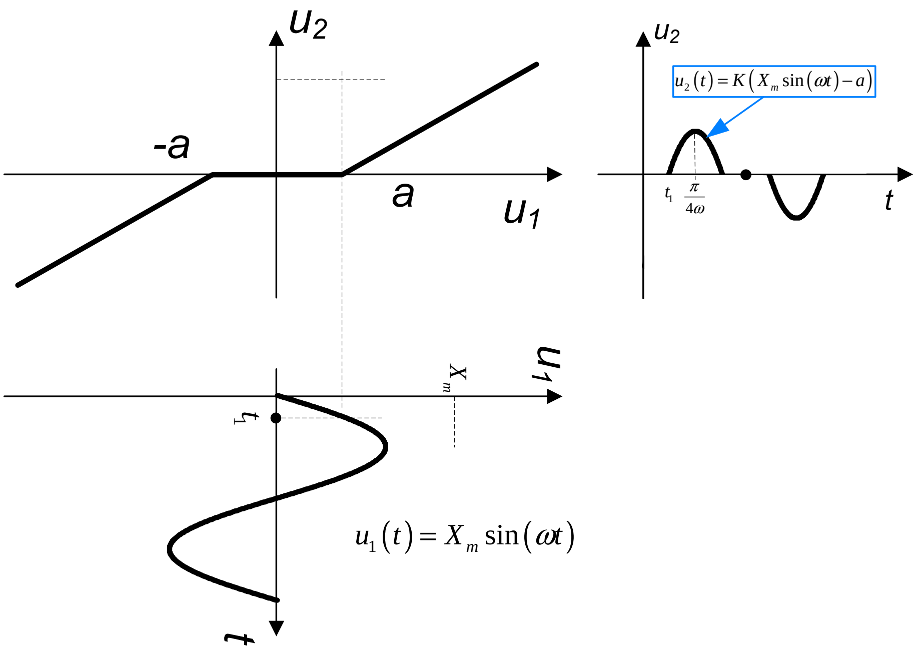
Zadatak 4

Na slici 7 prikazan je nelinearni element zona neosjetljivosti. Na ulaz nelinearnog elementa narinut je sinusni signal oblika $u_1(t) = X_m \sin(\omega t)$ gdje je $X_m > a$.

a) *(1 bod)* Nacrtajte signal na izlazu iz nelinearnog elementa, $u_2(t)$, i na njemu označite sve karakteristične točke.



Slika 7: Zona neosjetljivosti.



Slika 8: Zona neosjetljivosti i njezin izlaz uz sinusnu funkciju na ulazu.

b) *(4 boda)* Odredite opisnu funkciju $G(X_m) = P(X_m) + jQ(X_m)$ nelinearnog elementa kada je $X_m > a$. Ulazni signal je sinusni, oblika $x = X_m \sin(\omega t)$. U trenutku t_1, iznos ulaznog signala je a, stoga pišemo

$$a = X_m \sin(\omega t_1) = X_m \sin \varphi_1$$

odnosno

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{a}{X_m}$$

Slijedi imaginarni dio opisne funkcije je 0 budući da je nelinearni element jednoznačan.
Realni dio opisne funkcije:

$$P_N = \tfrac{4}{\pi X_m} \int\limits_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} u_2 \sin\varphi d\varphi = \tfrac{4}{\pi X_m} \int\limits_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} K\left(X_m \sin\varphi - a\right) \sin\varphi d\varphi =$$

$$= \tfrac{4K}{\pi X_m} \int\limits_{\varphi_a}^{\frac{\pi}{2}} \left(X_m \sin^2\varphi - a\sin\varphi\right) d\varphi$$

Vrijedi da je $\int \sin^2\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\left[\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]$ iz čega slijedi

$$\begin{aligned} P_N = \tfrac{4K}{\pi X_m} &\left[\tfrac{X_m}{2} \left(\tfrac{\pi}{2} - \varphi_a - \tfrac{1}{2}\sin\pi + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_a \right) - a\left(-\cos\tfrac{\pi}{2} + \cos\varphi_a \right) \right] = \\ &= \tfrac{2K}{\pi}\left(\tfrac{\pi}{2} - \varphi_a + \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi_a \right) - \tfrac{4K}{\pi}\tfrac{a}{X_m}\cos\varphi_a = \\ &= K - \tfrac{2K}{\pi}\left(\arcsin\tfrac{a}{X_m} + \tfrac{a}{X_m}\sqrt{1 + \left(\tfrac{a}{X_m}\right)^2} \right) \end{aligned}$$