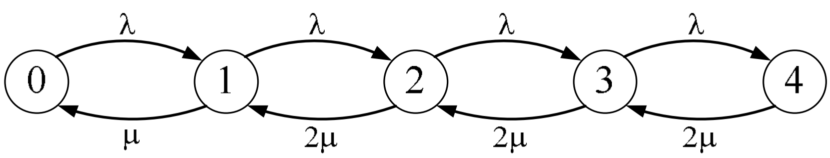
Riješeni primjeri 3

31. Sustav posluživanja se sastoji od dva poslužitelja i spremnika s dva mjesta. Ako poruka dođe u sustav u trenutku kad postoji slobodni poslužitelj ona neposredno odlazi na posluživanje. Ako pak dođe kad nema slobodnog poslužitelja, ali postoji slobodno mjesto u spremniku, ona čeka na posluživanje. Inače je poruka izgubljena. Srednja brzina dolazaka poruka je λ a srednja brzina posluživanja je μ. ($\geq \lambda$) To je, dakle, Markovljev sustav s gubicima i kašnjenjem.
(a) Skicirajte dijagram prijelaza takvog sustava.
(b) Napišite jednadžbe ravnoteže i odredite vjerojatnost p_0.

Rješenje:

(a)



(b)

$$\lambda p_0 = \mu p_1 \Rightarrow p_1 = a p_0 \quad (a = \lambda / \mu)$$

$$\lambda p_1 = 2\mu p_2 \Rightarrow p_2 = \frac{a^2}{2} p_0$$

$$\lambda p_2 = 2\mu p_3 \Rightarrow p_3 = \frac{a^3}{4} p_0$$

$$\lambda p_3 = 2\mu p_4 \Rightarrow p_4 = \frac{a^4}{8} p_0$$

$$\sum_{i=0}^{4} p_i = 1 \Rightarrow p_0\left(1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{4} + \frac{a^4}{8}\right) = 1 \Rightarrow p_0 = \left[1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{4} + \frac{a^4}{8}\right]^{-1}.$$

32. Za sustav opisan u Zadatku 31 neka je zadano $\lambda = \mu = 1$. Izračunajte:
(a) Vjerojatnost da u sustavu nema poruka (sustav je prazan, tj. poslužitelji su nezaposleni).
(b) Vjerojatnost gubitka poruka.
(c) Srednju duljinu reda čekanja.
(d) Srednje vrijeme čekanja.
(e) Usporedite vjerojatnosti gubitaka poruka za sustav s dva poslužitelja bez spremnika sa sustavom od četiri poslužitelja bez spremnika. Usporedite i komentirajte dobivene rezultate s rezultatom iz (b).

Rješenje:

(a)

$$a = \lambda / \mu = 1$$

$$p_0 = \left[1 + a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{4} + \frac{a^4}{8}\right]^{-1} = 0.3478.$$

(b) Poruka je izgubljena ako dođe kad je sustav (svi poslužitelji i spremnik) pun, tj. vjerojatnost gubitka (blokiranja) je

$$Blokiranje = P_4 = \frac{a^4}{8} p_0 = \frac{0.3478}{8} = 0.0435. \quad (4.35\%)$$

(c) Srednja duljina reda:

$$N_Q = \sum_{n=1}^{K-c} n p_{c+n} = \sum_{n=1}^{2} n p_{2+n} = p_3 + 2 p_4 = 0.087 + 0.087 = 0.174.$$

(d) Srednje vrijeme čekanja je (Little):

$$W = N_Q / \lambda = 0.174$$

(e) Primjenjujemo Erlang B formulu $B(c,a)$, $a = \lambda/\mu = 1$ dobivamo: B(2,1) = 1/5 = 0.2 (20%) i B(4,1) = 1/65 = 0.0153 (1.53%). Vjerojatnost gubitaka iz (b) je između tih dviju vrijednosti. To je i očekivano jer postojanje spremnika (reda čekanja) osigurava da se neke poruke neće izgubiti, ali dva mjesta u redu čekanja ipak ne smanjuju gubite kao dva dodatna poslužitelja.

33. Regulator prometa upravlja dolaskom poruka u spremnik prijenosne linije. Poruke dolaze srednjom brzinom λ sukladno eksponencijalnoj razdiobi međudolaznih vremena. Prijenosno vrijeme poruka može se modelirati eksponencijalnom razdiobom sa parametrom brzine μ. Regulator djeluje tako da dolazne poruke šalje na prijenosni spremnik s vjerojatnosti p, a s vjerojatnosti $(1-p)$ blokira poruke. Odredite prikladni model spremnika, uvjet stabilnosti spremnika, srednji broj poruka u spremniku i srednje kašnjenje poruke od njenog dolaska u spremnik do kraja njenog prijenosa.

Rješenje:

Na izlazu regulatora dolazni proces u prijenosni spremnik ostaje Poissonov proces srednje brzine $p\lambda$ jer je dobiven slučajnom podjelom ulaznog Poissonovog procesa. Blokirani proces je isto Poisonov srednje brzine $(1-p)\lambda$. Prijenosni spremnik možemo modelirati kao M/M/1 sustav: srednja brzina dolazaka je $p\lambda$ a brzina obrade poruka je μ. Sustav je stabilan: $\rho = p\lambda/\mu < 1$ Erl. Srednji broj poruka u spremniku N i srednje kašnjenje poruka T dobiven pomoću Littleovog teorema za M/M/1:

$$N = \frac{\rho}{1-\rho} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{N}{p\lambda} = \frac{1}{\mu - p\lambda}.$$

34. Na ulaz multipleksora dolaze poruke sukladno eksponencijalnoj razdiobi međudolaznh vremena. Multipleksor čine spremnik i prijenosna linija. Pretpostavite da se prijenosno vrijeme poruka ravna po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednosti 10 ms. Mjerenjem je ustanovljeno da

je spremnik prazan 80% vremena. Izračunajte: (a) prometni intenzitet (opterećenje), (b) srednju brzinu dolazaka poruka, (c) srednji broj poruka u sustavu i (d) srednje kašnjenje poruke.

Rješenje:

Multipleksor se može modelirati kao M/M/1 sustav: dolazni proces je Poissonov sa srednjom brzinom λ koju treba odrediti, a vrijeme posluživanja ravna se po eksponencijalnoj razdiobi srednje brzine $\mu = 1/\tau = 1/(10 \text{ ms}) = 100 \text{ s}^{-1}$. (a) Intenzitet prometa je $\rho = \lambda/\mu = \lambda \times 10$ ms/poruka, a uz $p_0 = 0.8$ je $\rho = 1 - p_0 = 0.2$ (sustav je stabilan). (b) Iz $\rho = \lambda \times 10$ ms/poruka dobivamo $\lambda =$ 0.2/10 poruka/ms = 20 poruka/s. (c) Srednji broj poruka N u M/M/1 sustavu je $N = \rho/(1-\rho) = 0.25$ poruka, a (d) srednje kašnjenje poruka dobivamo pomoću Littleovog teorema: $T = N/\lambda = 0.25/20 =$ 12.5 ms.

35. Telekomunikacijski operator ima dva paralelna odašiljača brzine 5 Mbit/s za realizaciju jedne radio veze (radio linka). Komutacija na ulazu ravnopravno dijeli poruke na ta dva odašiljača. Svaki odašiljač ima spremnik za poruke beskonačnog kapaciteta. Poruke dolaze na link sukladno Poissonovom procesu srednjom brzinom 20 poruka/s. Srednja duljina poruke je 100 kbit.
 (a) Izračunajte prometni intenzitet (opterećenje), srednji broj poruka i srednje kašnjenje poruke od njenog dolaska na ulaz radio linka do kraja njenog odašiljanja;
 (b) Pretpostavite da operator želi zamijeniti dva odašiljaća s jednim brzine 10 Mbit/s. Odredite sve parametre kao i u slučaju (a) te usporedite dobivene rezultate s onima iz (a).

Rješenje:

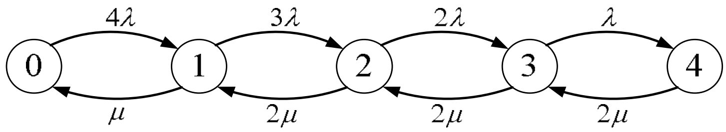
(a) Pretpostavljamo da se prijenosno vrijeme poruka ravna po ekspnencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednosti τ_1 = 100 kbit/(5 Mbit/s) = 20 ms. Ulazni dolazni proces se dijeli na dva jednako vjerojatna procesa koji dolaze u dva spremnika (reda čekanja). Srednja brzina dolazaka za svaki red čekanja je $\lambda/2$ = 10 poruka/s, a pripadni intenzitet prometa je $\rho_1 = \lambda\tau_1/2$ = 0.2 Erl (stabilno). Svaki se odašiljač može modelirati kao sustav M/M/1 pa vrijedi: $N_1 = \rho_1/(1-\rho_1) = 0.25$ poruka i (Little) $T_1 = N_1/(\lambda/2) = 0.025$ s.

(b) Sada je τ_2 = 100 kbit/(10 Mbit/s) = 10 ms = $\tau_1/2$. Srednja brzina dolazaka za jedan sustav M/M/1 je λ= 20 poruka/s, a pripadni intenzitet prometa je $\rho_2 = \lambda\tau_2 = \rho_1 = 0.2$ Erl (stabilno). Sada imamo: $N_2 = \rho_2/(1-\rho_2) = N_1$ i $T_1 = N_2/\lambda = T_1/2$. Umjesto da se prijenosni kapacitet dijeli na različite odašiljače operatoru je bolje koncentrirati se na samo jedan odašiljač.

36. Radio link se iz razloga pouzdanosti sastoji od četiri jednaka paralelna odašiljača. Operativna svojstva odašiljača zahtijevaju da se svaki odašiljač isključi iz rada (radi održavanja, popravaka itd.) sukladno Poissonovom procesu sa srednjim međudolaznim vremenom od jednog mjeseca. Trajanje održavanja (servisa) se ravna po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjim trajanjem 12 sati. Održavanje obavljaju dva tehničara.
 (a) Skicirajte dijagram prijelaza za takav sustav.
 (b) Napišite jednadžbe ravnoteže i odredite vjerojatnosti p_n, n = 0,1,... Kolika je vjerojatnost da niti jedan odašiljač na linku nije u operativnom stanju (svi su na servisu)

Rješenje:

(a)



(b) Jednadžbe ravnoteže:

rez 1: $4\lambda p_0 = \mu p_1 \quad \Rightarrow p_1 = 4\frac{\lambda}{\mu} p_0 = 4\rho p_0$

rez 2: $3\lambda p_1 = 2\mu p_2 \quad \Rightarrow p_2 = \frac{3\lambda}{2\mu} p_1 = \frac{4\cdot 3}{2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0 = \frac{4\cdot 3}{2}\rho^2 p_0$

rez 3: $2\lambda p_2 = 2\mu p_3 \quad \Rightarrow p_3 = \frac{2\lambda}{2\mu} p_2 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2^2}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 p_0 = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{2^2}\rho^3 p_0$

rez 4: $\lambda p_3 = 2\mu p_4 \quad \Rightarrow p_4 = \frac{\lambda}{2\mu} p_3 = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^3}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4 p_0 = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2^3}\rho^4 p_0$

Općeniti izraz:

$$p_n = \frac{4!}{2^{n-1}(4-n)!}\rho^n p_0, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad 0 < n \le 4$$

Iz normalizacijskog uvjeta dobivamo:

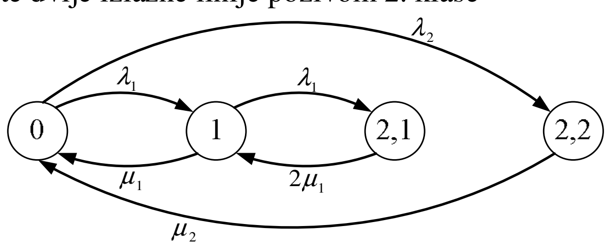
$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{n=1}^{4h}\frac{4!}{2^{n-1}(4-n)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}$$

Vjerojatnost da niti jedan od odašiljača nije operativan jednaka je p_4.

37. Privatna lokalna (kućna) centrala ima dvije izlazne linije i nema spremnik za spemanje poziva. Na ulaz centrale dolaze dvije klase (vrste) poziva: *Poziv prve klase* zahtjeva jednu izlaznu liniju; dolazni proces je Poissonov srednje brzine λ_1 a trajanje poziva se ravna po eksponencijalnoj razdiobi srednje brzine μ_1. *Poziv druge klase* zahtjeva dvije izlazne linije; dolazni proces je Poissonov srednje brzine λ_2 a trajanje poziva se ravna po eksponencijalnoj razdiobi srednje brzine μ_2. Ako dolazni poziv zahtjeva broj izlaznih linija veći od raspoloživih on se blokira i odbaci.
(a) Skicirajte dijagram prijelaza za takav sustav.
(b) Napišite jednadžbe ravnoteže i odredite vjerojatnosti blokiranja za svaku klasu poziva.

Rješenje:

(a) stanje {2,1}: zauzete dvije izlazne linije pozivom 1. klase
stanje {2,2}: zauzete dvije izlazne linije pozivom 2. klase



(b) Promatramo ravnotežu u čvorovima {0}, {1} i {2,2}:

ravnoteža 1: $(\lambda_1+\lambda_2)p_0=\mu_1 p_1+\mu_2 p_{2,2}$ (za stanje 0)

ravnoteža 2: $(\lambda_1+\mu_1)p_1=\lambda_1 p_0+2\mu_1 p_{2,1}$ (za stanje 1)

ravnoteža 3: $\lambda_2 p_0=\mu_2 p_{2,2}$ (za stanje $\{2,2\}$)

$$p_1=\frac{\lambda_1}{\mu_1}p_0=\rho_1 p_0,\quad p_{2,1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)^2 p_0=\frac{1}{2}\rho_1^2 p_0,\quad p_{2,2}=\frac{\lambda_2}{\mu_2}p_0=\rho_2 p_0$$

$$p_0=\left(1+\rho_1+\frac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2\right)^{-1}$$

Na osnovu svojstva PASTA, poziv 1. klase je blokiran s vjerojatnosti $P_{B,1}$ kad je sustav u stanjima {2,1} i {2,2}, a poziv 2. klase je blokiran s vjerojatnosti $P_{B,2}$ kad je sustav u stanjima {1}, {2,1} i {2,2}.

$$P_{B,1}=p_{2,1}+p_{2,2}=\frac{\frac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2}{1+\rho_1+\frac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2},\qquad P_{B,2}=p_1+p_{2,1}+p_{2,2}=\frac{\rho_1+\frac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2}{1+\rho_1+\frac{1}{2}\rho_1^2+\rho_2}$$

38. Deset terminala u poslovnici jedne banke statistički dijeli kapacitet izlaznog linka. Na izlaznom linku stopljen je informacijski promet od deset terminala te se poslužuje po načelu njihovog generiranja (FIFO disciplina posluživanja). Sustav modelirajte kao red M/M/1 s beskonačnim spremnikom. Izračunajte srednji broj paketa u sustavu i očekivano vrijeme čekanja za sljedeće slučaje:
(a) Terminali generiraju pakete svakih 10 sekundi, brzina linka je 1024 bit/s, a duljina paketa je 512 bit.
(b) Ponovite (a) za slučaj 30 terminala i spremnik veličine $K = 10$. Izračunajte vjerojatnost blokiranja te usporedite dobivene rezultate sa slučajem beskonačnog spremnika. .

Rješenje:

(a) T_p = prijenosno vrijeme paketa = 512/1024 = 0.5 s
$\mu=1/T_p = 1/0.5 = 2$ paket/s = srednja brzina posluživanja
$\lambda = (1/10)\times 10$ terminala = 1 paket/s
$\rho = \lambda/\mu = 0.5$
$E(n) = N = \rho/(1-\rho) = 1$ paket/s

$$W=T-T_p=\frac{N}{\lambda}-T_p\left(=\frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}=\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}\right)=\frac{1}{1}-0.5=0.5\text{ s}$$

(b) $\lambda = (1/10)\times 30 = 3$ paket/s
$\rho = \lambda/\mu = 3/2 = 1.5 > 1$. Za M/M/1 je $N = \rho/(1-\rho) = 1.5/(-0.5) < 0$, što je neispravno!
Za sustav s konačnim spremnikom M/M/1/K ($K = 10$) imamo:

$$N = E[n] = \sum_{i=0}^{K} \frac{i(i-\rho)\rho^i}{1-\rho^{i+1}} = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \sum_{i=1}^{K} i\rho^i = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \rho \sum_{i=1}^{K} i\rho^{i-1} = \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{K+1}} \frac{d}{d\rho} \sum_{i=1}^{K} \rho^i =$$

$$= \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{K+1}} \left[\frac{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1-\rho} \right] = \frac{-0.5(1.5)}{-85.5} \left[\frac{1-11(1.5)^{10}+10(1.5)^{11}}{1-1.5} \right] = 4.06 \text{ paket}$$

Vjerojatnost blokiranja:

$$P_B = P(n=K) = P_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = 0.34$$

Srednje vrijeme čekanja:

$$\lambda' = \lambda(1-P_B) = 1.98 \text{ paket/s}$$

$$W = T - T_p = \frac{N}{\lambda'} - \frac{1}{\mu} = \frac{4.06}{1.98} - 0.5 = 1.55 \text{ s}$$

39. Zadan je red čekanja M/M/1 sa spremnikom konačnog kapaciteta K (tj. red M/M/1/K).
(a) Dokažite da je vjerojatnost blokiranja jednaka $1/(K+1)$ ako je $\rho = 1$.
(b) Takav red čekanja multipleksira promet od 10 korisnika pri čemu svaki korisnik generira promet od 256 bit/s. Brzina posluživanja je 16 paket/s, svaka poruka se sastoji u prosjeku od četiri paketa, a svaki paket ima duljinu 512 bit. Odredite vjerojatnost blokiranja i očekivano vrijeme čekanja ako je $K = 4$ poruke.

Rješenje:

(a)

$$P_B |_{\rho=1} = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = \frac{0}{0}, \text{ deriviranjem brojnika i nazivnika dobivamo}$$

$$= \left. \frac{K\rho^{K-1} - (K+1)\rho^K}{-(K+1)\rho^K} \right|_{\rho=1} = \frac{1}{K+1}$$

(b) $\lambda = 10 \times 256/(512 \times 4) = 1.25$ poruka/s
$\mu = 16/4 = 4$ poruka/s
$\rho = \lambda/\mu = 1.25/4 = 0.31 < 1$.
Za sustav s konačnim spremnikom M/M/1/K ($K = 4$) imamo:
Vjerojatnost blokiranja:

$$P_B = P(n=K) = P_K = \frac{(1-\rho)\rho^K}{1-\rho^{K+1}} = 0.0066$$

Srednji broj poruka:

$$\lambda' = \lambda(1-P_B) = 1.242 \text{ poruka/s}$$

$$N = E[n] = \sum_{i=0}^{K} \frac{i(i-\rho)\rho^i}{1-\rho^{i+1}} = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \sum_{i=1}^{K} i\rho^i = \frac{(1-\rho)}{1-\rho^{K+1}} \rho \sum_{i=1}^{K} i\rho^{i-1} = \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{K+1}} \frac{d}{d\rho} \sum_{i=1}^{K} \rho^i =$$

$$= \frac{(1-\rho)\rho}{1-\rho^{K+1}} \left[\frac{1-(K+1)\rho^K + K\rho^{K+1}}{1-\rho} \right] = \frac{0.69(0.31)}{0.997} \left[\frac{1-5(0.31)^4+4(0.31)^5}{0.69} \right] \cong 0.3 \text{ poruka}$$

Srednje vrijeme čekanja:

$$W = T - T_p = \frac{N}{\lambda'} - \frac{1}{\mu} = \frac{0.3}{1.24} - 0.25 \cong 0 \text{ s}$$

40. U mreži s komutacijom kanala izračunajte:
   (a) Potrebni broj kanala uz koji će vjerojatnost blokiranja poziva biti manja od 0.2. Poissonov promet ima srednju brzinu dolazaka 120 poziv/h i eksponencijalno trajanje poziva srednje vrijednosti 2 min/poziv. Pretpostavite da su blokirani pozivi odbačeni.
   (b) Koliki je potreban broj kanala, uz jednaki ponuđeni promet, ako su dozvoljeni gubici najviše 0.02?

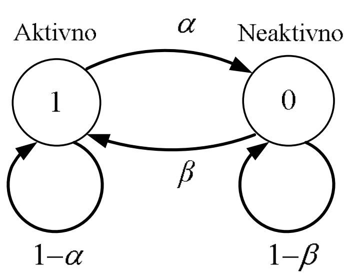
Rješenje:

Zadatak rješavamo kao red M/M/c/c. Koristimo Erlang-B formulu. λ = 120 poziv/h = 2 poziv/min, μ = 1/2 min/poziv ⇒ $a = \lambda/\mu = 4$ erl. Iz tablica (Erlang-B) dobivamo: (a) $c = 5$ (prihvatljivo i 6), (b) $c = 9$. (Može se koristiti rekurzivna formula za $B(c,a)$).

41. Govorna informacija je digitalizirana i paketizirana. Formirani govorni paketi se odašilju na liniju brzine 150 Mbit/s. Svaki govorni paket ima fiksnu duljinu trajanja prijenosa T_p. Neka je α vjerojatnost da će se u sljedećem prijenosnom vremenu T_p izvor prebaciti iz aktivnog (govornog) u neaktivno stanje (tišina), a β vjerojatnost da će se u sljedećem intervalu T_p izvor prebaciti iz neaktivnog u aktivno stanje.
   (a) Skicirajte Markovljev lanac koji opisuje navedeni model, napišite jednadžbe stanja i odredite stacionarne vjerojatnosti za svako stanje.
   (b) Ako je srednje trajanje aktivnog stanja 350 ms a srednje trajanje tišine 650 ms, izračunajte parametre α i β. Pretpostavite da je duljina paketa 400 bit.

Rješenje:

(a)



$\alpha p_A = \beta p_N$, $p_A + p_N = 1 \Rightarrow p_A = \beta/(\alpha + \beta)$, $p_N = \alpha/(\alpha + \beta)$.
(A-aktivno, N-neaktivno stanje).

(b) T_p = Prijenosno vrijeme paketa = (Duljina paketa)/(Brzina prijenosa)
   = 400 bit/(150 Mbit/s) = 2.66 μs.
   Duljina aktivnog intervala se ravna po geometrijskoj razdiobi. Neka je $P\{X=i\}$ vjerojatnost da slučajna varijabla (za aktivni interval) X ima duljinu i prijenosnih vremena T_p. Onda je:

Srednje trajanje aktivnog stanja:

$$350\times10^{-3}=\left[\sum_{i=1}^{\infty} i(1-\alpha)^{i-1}\alpha\right]T_p=\frac{1}{\alpha}T_p \Rightarrow$$

$$\alpha=\frac{2.66\times10^{-6}}{350\times10^{-3}}\cong 7.6\times10^{-6}$$

Slično je:

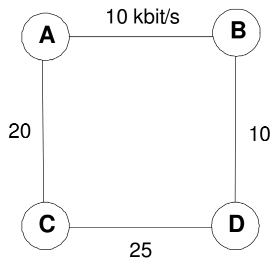
$$\beta=\frac{2.66\times10^{-6}}{650\times10^{-3}}\cong 4.1\times10^{-6}$$

42. Zadana je paketska mreža (slika a) s četiri čvora A, B, C i D i četiri dvosmjerne (full duplex) linije. Kapaciteti linija C_l, $l = (i, j)$, $i \neq j$, su zadani u kbit/s uz svaku liniju (npr. $C_{AB} = C_{BA} = 10$ kbit/s). Na slici b su zadane prometna matrica $[\gamma_{ij}]$ i matrica usmjeravanja. γ_{ij} je broj paketa poslanih od čvora i do čvora j (pretpostavlja se da su dolazni procesi Poissonovi) duž rute (puta) $i - j$ (npr. ponuđeni promet γ_{AD} od A do D iznosi 8 paket/s i usmjerava se rutom ACD). Duljina paketa se ravna po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom duljinom 1000 bit. Odredite:
(a) Srednje kašnjenje paketa T_l i tok λ_l na svakoj grani $l = (i,j)$, $i \neq j$.
(b) Srednji broj grana (skokova) n i srednje kašnjenje s kraja na kraj T za zadanu mrežu.
[*Upute:* Kašnjenje na grani $l = (i, j)$, $i \neq j$, je $T_l = 1/(\mu C_l - \lambda_l)$; C_l je kapacitet (brzina) grane l (bit/s), $1/\mu$ je srednja duljina paketa (bit/paket), a λ_l (paket/s) je promet (tj. brzina) na grani l. Grane su dvosmjerne, pa u (a) treba računati sve tražene parametre u oba smjera (npr. T_{AB} i T_{BA}). Broj skokova („hops") je broj grana na nekoj ruti usmjeravanja; npr. ruta od A do D ima dva skoka. U (b) treba izračunati koliko prosječno skokova ponuđeni (vanjski) promet mora „savladati" a može se odrediti kao omjer ukupnog unutarnjeg i vanjskog prometa.]

b)

od-do	A	B	C	D
A		5, AB	3, AC	8, ACD
B	5, BA		4, BDC	1, BD
C	3, CA	4, CDB		3, CD
D	8, DCA	1, DB	3, DC	

a)



Rješenje:

(a) Računamo po formuli $T_l = 1/(\mu C_l - \lambda_l)$, $1/\mu = 1000$ bit/paket:

Grana	λ_l [paket/s]	C_l [kbit/s]	μC_l [paket/s]	T_l [ms]
AB	5	10	10	$(1/5)\times10^3 = 200$
AC	3 + 8 = 11	20	20	$(1/9)\times10^3 = 111.1$
BD	1 + 4 = 5	10	10	$(1/5)\times10^3 = 200$
CD	8 + 3 + 4 = 15	25	25	$(1/10)\times10^3 = 100$
BA	5	10	10	200
CA	11	20	20	111.1
DB	5	10	10	200
DC	15	25	25	100

(b)

$$\lambda = \text{ukupni unutarnji tok } = \sum \lambda_l = 72 \text{ paket/s}$$

$$\gamma = \text{ukupni vanjski tok } = \sum_{i,j} \gamma_{ij} = 48 \text{ paket/s}$$

$$\bar{n} = \text{ srednji broj skokova} = \frac{\lambda}{\gamma} = \frac{72}{48} = 1.5 \text{ skok}$$

$$T = \text{srednj paketsko kašnjenje s kraja na kraj} = \bar{n}\sum_l \frac{\lambda_l T_l}{\lambda} \quad (\equiv \frac{1}{\gamma}\sum_l \lambda_l T_l)$$

$$= \frac{1.5}{72}\left[5\times200 + 11\times111.1 + 5\times200 + 15\times100\right]\times 2 \cong 196.75 \text{ ms}$$

43. Telemetrijska mreža za prijenos podataka je organizirana na sljedeći način. Svaka od tri regije (npr. A, B i C) ima vlastitu podmrežu čiji je koncentrator spojen na glavno računalo linijom brzine 800 bit/s (zvjezdasta topologija: koncentratori-glavno računalo). Terminali (senzori sa spremnikom) u pojedinoj regiji povezani su na pripadni koncentrator linijama brzine 100 bit/s (zvjezdasta topologija: terminali-koncentrator). Poruke imaju srednju duljinu 1000 bit. Tipičan terminal šalje prosječno jednu poruku svake minute. Broj terminala u pojedinoj regiji A, B i C je redom 20, 15 i 10. Izračunajte prosječno kašnjenje poruke (samo jednosmjerno kašnjenje do glavnog računala; koristite M/M/1 model).

Rješenje:

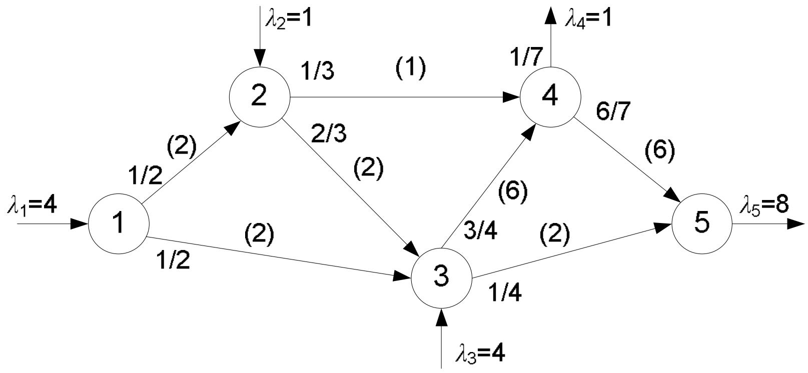
Koristimo M/M/1 model za koji je kašnjenje na grani $l = (i, j)$, $i \neq j$, je $T_l = 1/(\mu C_l - \lambda_l)$; C_l je kapacitet (brzina) grane l (bit/s), $1/\mu$ je duljina poruke (bit/poruka), a λ_l je promet (tj. brzina) na grani l (poruka/s).
C_{ter} = 100 bit/s, C_{konc} = 1000 bit/s, μ = 1/(1000 bit/poruka) = 0.001 poruka/bit;
λ_{ter} = 1/60 = 0.0167 poruka/s.
Promet od svih terminala prema koncentratorima: $\lambda_{\text{prist}} = 45\lambda_{\text{ter}}$ = 3/4 = 0.75 poruka/s;
Promet od koncentratora prema centru:
$\lambda_A = 20\lambda_{\text{ter}}$ = 1/3 = 0.333 poruka/s; $\lambda_B = 15\lambda_{\text{ter}}$ = 1/4 = 0.25 poruka/s;
$\lambda_C = 10\lambda_{\text{ter}}$ = 1/6 = 0.167 poruka/s.
$\lambda_{\text{konc}} = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C = 45\lambda_{\text{ter}}$ = 3/4 = 0.75 poruka/s.
Ukupni promet: $\lambda_{\text{uk}} = \lambda_{\text{prist}} + \lambda_{\text{konc}} = 90\lambda_{\text{term}}$ = 1.5 poruka/s.
Brzina terminalske linije: μC_{ter} = 100/1000 = 0.1 poruka/s.
Brzina koncentratorske linije: μC_{konc} = 800/1000 = 0.8 poruka/s.
Prosječno kašnjenje linije l je $T_l = 1/(\mu C_l - \lambda_l)$.
Kašnjenje pojedinog terminalske linije: $T_{\text{ter}} = 1/(\mu C_{\text{ter}} - \lambda_{\text{ter}})$ = 1/(0.1 – 0.0167) = 12 s.
Kašnjenje koncentratorske linije A: $T_A = 1/(\mu C_{\text{konc}} - \lambda_A)$ = 1/(0.8 – 0.333) = 2.14 s.
Kašnjenje koncentratorske linije B: $T_B = 1/(\mu C_{\text{konc}} - \lambda_B)$ = 1/(0.8 – 0.25) = 1.81 s.
Kašnjenje koncentratorske linije C: $T_C = 1/(\mu C_{\text{konc}} - \lambda_C)$ = 1/(0.8 – 0.167) = 1.58 s
Srednje kašnjenje poruke na grani je omjer svih kašnjenja u mreži (pristupna i koncentratorska kašnjenja) i ukupnog prometa (ukupan broj poruka prisutnih u mreži u jedinici vremena):

$$T = \frac{1}{\lambda_{\text{uk}}}\sum_l \lambda_l T_l = \frac{1}{1.5}\left[45\times 0.0167\times 12 + 0.333\times 2.14 + 0.25\times 1.81 + 0.167\times 1.58\right] \cong 6.96\,\text{s}.$$

Budući da sve poruke prolaze kroz dvije grane (dva „skoka”) ukupno prosječno kašnjenje poruke je

$$T_{\text{uk}} = 2T \cong 13.9\ \text{s}.$$

44. Za paketsku mrežu na slici svi dolasci paketa se ravnaju po Poissonovoj razdiobi a njihove duljine po eksponencijalnoj razdiobi pri čemu je srednja brzina posluživanja $\mu = 8$ paket/s. Iznos prometa λ_{ij} [paket/s] na pojedinoj linije (grani) (i, j) dan je brojem u zagradi. Uz svaku granu zadan je i udio ulaznog prometa prisutan na toj vezi. Time je opisano usmjeravanje prometnih tokova od izvorišnih do odredišnih čvorova.
(a) Provjerite vrijednosti svih (unutarnjih) tokova na granama (zadani u zagradama) i sve (vanjske) tokove koji izlaze iz mreže;
(b) Odredite srednji broj paketa (odaslanih i onih na čekanju) između čvorova 1 i 5 pretpostavljajući da je ruta kojom se ti paketi prijenose (1,2,4,5). Isto ponovite za rutu (2,3,4) između čvorova 2 i 4.
(c) Pretpostavite da je $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ te izračunajte sve unutarnje i vanjske tokove kao i pod (a), te uporabom Littleove formule odredite srednje mrežno kašnjenje (srednje vrijeme boravka paketa u mreži) između izvorišta 1 i odredišta 5.
(d) Za mrežu iz (c) odredite vjerojatnost da je suma srednjeg broja paketa u prvom i drugom čvoru veća ili jednaka dva paketa, tj. da je $(n_1 + n_2) \geq 2$.



Rješenje:

(a) Ovaj dio zadatka se svodi na Kirchhoffove zakone! Prvo, suma tokova koji ulaze u mrežu mora biti jednaka sumi tokova koji izlaze iz mreže: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_4 + \lambda_5 = 9$. Za svaki čvor imamo:

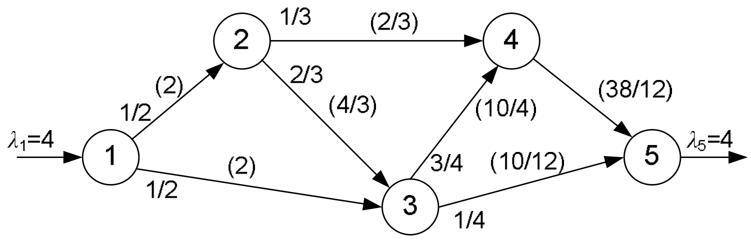
$\lambda_{12} = \lambda_1\cdot 1/2 = 2$, $\lambda_{13} = \lambda_1\cdot 1/2 = 2$; $\lambda_{23} = 2/3\cdot(\lambda_2 + \lambda_{12}) = 2$, $\lambda_{24} = 1/3\cdot(\lambda_2 + \lambda_{12}) = 1$;
$\lambda_{34} = 3/4\cdot(\lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_3) = 6$, $\lambda_{35} = 1/4\cdot(\lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_3) = 2$;
$\lambda_{45} = 6/7\cdot(\lambda_{24} + \lambda_{34}) = 6$;
$\lambda_4 = 1/7\cdot(\lambda_{24} + \lambda_{34}) = 1$; $\lambda_5 = \lambda_{35} + \lambda_{45} = 8$.

(b) Za red M/M/1 srednji broj paketa u sustavu u stacionarnom stanju iznosi $N = \lambda/(\mu - \lambda)$ pa imamo:

$N_{15} = N_{12} + N_{24} + N_{45} = 2/(8-2) + 1/(8-1) + 6/(8-6) = 0.33 + 0.14 + 3 = 3.47$
$N_{24} = N_{23} + N_{34} = 2/(8-2) + 6/(8-6) = 0.33 + 3 = 3.33$

(c) Uz $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ dobivamo:

$\lambda_{12} = 2$, $\lambda_{13} = 2$; $\lambda_{23} = \lambda_{12}\cdot 2/3 = 4/3$, $\lambda_{24} = \lambda_{12}\cdot 1/3 = 2/3$;
$\lambda_{34} = 3/4\cdot(\lambda_{13} + \lambda_{23}) = 10/4$, $\lambda_{35} = 1/4\cdot(\lambda_{13} + \lambda_{23}) = 10/12$;
$\lambda_{45} = 1\cdot(\lambda_{24} + \lambda_{34}) = 19/6$;
$\lambda_5 = \lambda_{35} + \lambda_{45} = 4 = \lambda_1$



Littleovu formulu ćemo primjeniti na mrežu redova kako bi izračunali srednje mrežno kašnjenje (vrijeme boravka) „tipičnog" paketa, tj. srednje kašnjenje paketa koji je ušao u mrežu u čvoru 1 a izašao u čvoru 4. Svakoj grani pripada jedan red čekanja. Ukupno imamo M (= 7) grana odnosno redova čekanja. Za granu (i, j) srednje kašnjenje (čekanje + posluživanje) iznosi:

$$T_{ij} = N_{ij}/\lambda_{ij}$$

gdje je N_{ij} srednji broj paketa na grani (i, j) koji su na posluživanju ili na čekanju, a λ_{ij} je srednja vrijednost prometnog toka na toj grani. Ako s λ označimo ukupnu „agregiranu ulaznu brzinu" (tj. zbroj svih ulaznih brzina) koja je jednaka ukupnoj „agregiranoj izlaznoj brzini" za izučavanu mrežu, tada ukupno srednje (očekivano) kašnjenje za cijelu mrežu možemo odrediti pomoću Littleove formule:

$$\begin{aligned} T &= \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\sum_{(i,j)} N_{ij} = \frac{1}{\lambda}\sum_{(i,j)} \frac{\lambda_{ij}}{\mu_{ij} - \lambda_{ij}} \\ &= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{8-2} + \frac{2}{8-2} + \frac{4/3}{8-4/3} + \frac{2/3}{8-2/3} + \frac{10/4}{8-10/4} + \frac{10/12}{8-10/12} + \frac{19/6}{8-19/6}\right] \\ &= 0.5459 \text{ s} \end{aligned}$$

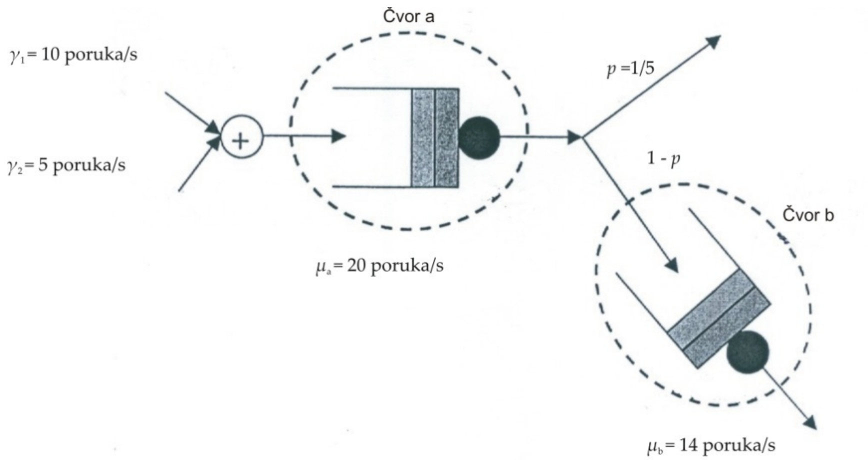
(d) U zadatku su postavljeni uvjeti samo za prva dva čvora za koje je $\rho_1 = 4/8 = 1/2$ i $\rho_2 = 2/8 = 1/4$. Imamo:

$$p(n_1+n_2 \geq 2) = 1 - p(n_1, n_2, ..., n_5 \mid n_1+n_2 < 2)$$
$$= 1 - \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\cdots\sum_{n_5=0}^{\infty}\prod_{i=1}^{5}(1-\rho_i)\rho_i^{n_i}$$

Uz pretpostavku o nezavisnosti gornji izraz se svodi na razmatranje samo prva dva čvora (uočite da računamo protivnu vjeratnost, tj. vjerojatnost da je $(n_1 + n_2) < 2$):

$$p(n_1+n_2) = 1 - \left[(1-\rho_1)(1-\rho_2) + (1-\rho_1)\rho_1(1-\rho_2) + (1-\rho_2)\rho_2(1-\rho_1)\right]$$
$$= 1 - \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\right] = \frac{11}{32}.$$

45. Na slici je prikazana aciklična mreža redova bez povratnih veza. Dolazni procesi iz okoline mreže su neovisni i ravnaju se po Poissonovoj razdiobi sa srednjim brzinama γ_1 i γ_2. Prijenosna vremena poruka se ravnaju po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjim brzinama μ_a i μ_b. Izračunajte srednje kašnjenje poruke od ulaska do izlaska iz mreže.



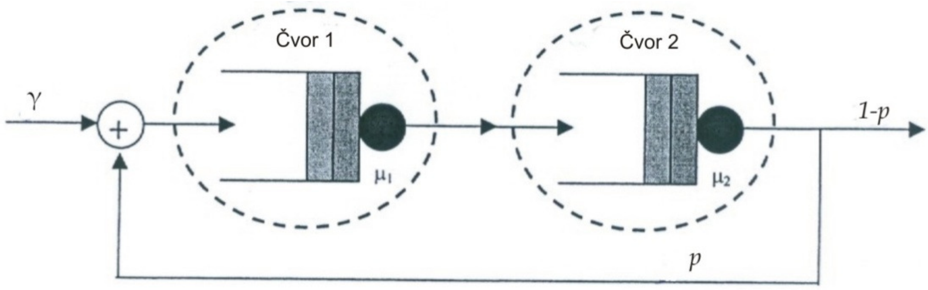
Rješenje:

Vanjski Poissonovi dolasci su neovisni pa je i njihova suma Poissonov proces sa srednjom dolaznom brzinom $\gamma_1 + \gamma_2$ poruka/s. Čvor a je red $M/M/1$ s beskonačnim spremnikom i ulaznim intenzitetom prometa $\rho_a = (\gamma_1 + \gamma_2)/\mu_a = 15/20 = 3/4$ erl. Red je stabilan jer je $\rho_a < 1$. Srednji broj poruka u tom čvoru iznosi $N_a = \rho_a/(1 - \rho_a) = 3$. Pomoću Littleovog teorema odredimo srednje kašnjenje poruke u čvoru a: $T_a = N_a/(\gamma_1 + \gamma_2) = 1/5 = 0.2$ s. Izlazni proces iz čvora a je i dalje Poissonov sa srednjom brzinom $\gamma_1 + \gamma_2$ (Burkeov teorem). Takav Poissonov proces slučajno se djeli na poruke koje napuštaju mrežu s vjerojatnosti p i poruke koje se usmjeravaju prema čvoru b s vjerojatnošću $1-p$. Ulazni proces u čvor b je i dalje Poissonov sa srednjom brzinom $(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2)$. Čvor b je red $M/M/1$ s intenzitetom prometa $\rho_b = (1-p)(\gamma_1 + \gamma_2)/\mu_b = 6/7$ erl < 1 (stabilno). Srednji broj poruka u čvoru b je $N_b = \rho_b/(1 - \rho_b) = 6$ poruka, a srednje kašnjenje za čvor b je $T_b = N_b/[(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2)] = 1/2 = 0.5$ s.

Srednje kašnjenje poruke od ulaza do izlaza iz mreže redova može se odrediti (uz zanemarenje propagacijskog kašnjenja) kao:

$$T = pT_a + (1-p)(T_a + T_b) = T_a + (1-p)T_b = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5} = 0.6 \text{ s}$$

46. Na slici je prikazana mreža redova spojenih u seriju (tandem) s povratnom vezom (ciklička mreža). Poruke koje dolaze iz okoline mreže u prvi čvor ravnaju se po Poissonovoj razdiobi sa srednjom brzinom dolazaka γ. Vremena posluživanja poruka u oba čvora su neovisna i ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjim brzinama μ_1 i μ_2. Čvorovi imaju beskonačne spremnike, a usmjeravanje u izlaznom čvoru je stohastičko. Odredite:
(a) Uvjete stabilnosti za svaki čvor.
(b) Razdiobu vjerojatnosti stanja za svaki čvor.
(c) Srednji broj poruka u svakom čvoru.
(d) Srednje kašnjenje poruka od ulaska u mrežu do izlaska iz mreže (end-to-end).



Rješenje:

Zadana mreža u potpunosti zadovoljava uvjete Jacksonovog teorema: (1) spremnici su beskonačni, (2) usmjeravanje je stohastičko, (3) vanjski dolazni procesi iz okoline mreže su Poissonovi i međusobno neovisni i (4) razdiobe vremena posluživanja poruka su eksponencijalna i neovisna od čvora do čvora.

(a) Prema Jacksonovom teoremu svaki čvor je sustav *M*/*M*/1. Za svaku točku stapanja (sumiranja) prometnih tokova (u ovom zadatku postoji samo jedna takva točka) možemo napisati prometne jednadžbe srednjih brzina. Ako je λ ukupna srednja brzina dolazaka na ulaz čvora 1 tada, uz pretpostavku da je taj čvor stabilan, izlazna srednja brzina iz čvora 1 izosi također λ. To je ujedno srednja ulazna brzina u čvor 2. Čvor 1 je stabilan uz uvjet da je $\rho_1 = \lambda/\mu_1 < 1$ erl, a čvor 2 uz uvjet da je $\rho_2 = \lambda/\mu_2 < 1$ erl. λ određujemo iz jednadžbe za srednju brzinu:

$$\gamma + \lambda p = \lambda \Rightarrow \lambda = \gamma/(1-p)$$

Sada možemo odrediti intenzitete prometa za čvorove 1 i 2:

$$\rho_1 = \frac{\gamma}{(1-p)\mu_1}; \quad \rho_2 = \frac{\gamma}{(1-p)\mu_2}$$

(b) Vjerojatnost stanja u pojedinom čvoru ravna se po geometrijskoj razdiobi (sustav *M*/*M*/1). Ako s P_{n1} (P_{n2}) označimo vjerojatnost da se n_1 (n_2) poruka nalazi u čvoru 1 (čvoru 2) tada imamo:

$$P_{n1}(n) = (1-\rho_1)\rho_1^n, \quad P_{n2}(n) = (1-\rho_2)\rho_2^n, \quad n = 0,1,\ldots$$

Razdioba stanja za stanje mreže (n_1, n_2) ima produktni oblik $P_{n1,n2} = P_{n1} \times P_{n2}$.

(c) Srednji broj poruka u čvorovima 1 i 2 su redom $N_1 = \rho_1/(1 - \rho_1)$ i $N_2 = \rho_2/(1 - \rho_2)$.

(d) Srednja kašnjenja poruka u čvorovima 1 i 2 dobijemo primjenom Littleovog teorema:

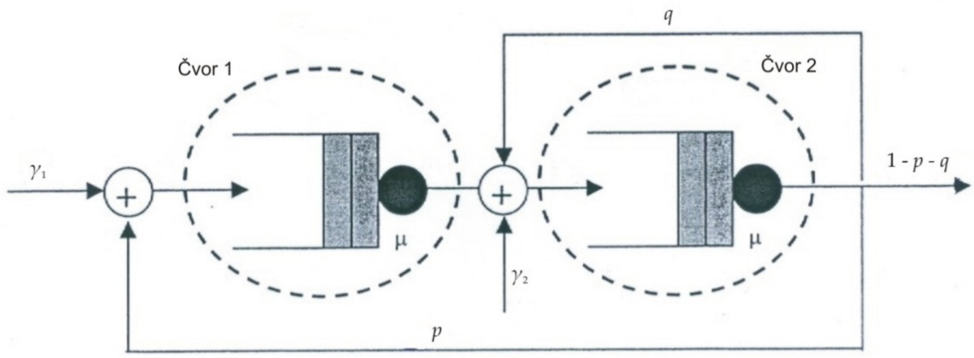
$$T_1 = \frac{N_1}{\lambda} = \frac{\rho_1}{\lambda(1-\rho_1)} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda}; \quad T_2 = \frac{N_2}{\lambda} = \frac{\rho_2}{\lambda(1-\rho_2)} = \frac{1}{\mu_2 - \lambda}$$

Srednje kašnjenje T poruke od ulaska u mrežu do izlaska iz mreže dobivamo kao:

$$T = \frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{2} \lambda T_k = \frac{1}{1-p}\sum_{k=1}^{2} T_k = \frac{1}{1-p}\left[\frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda}\right]$$

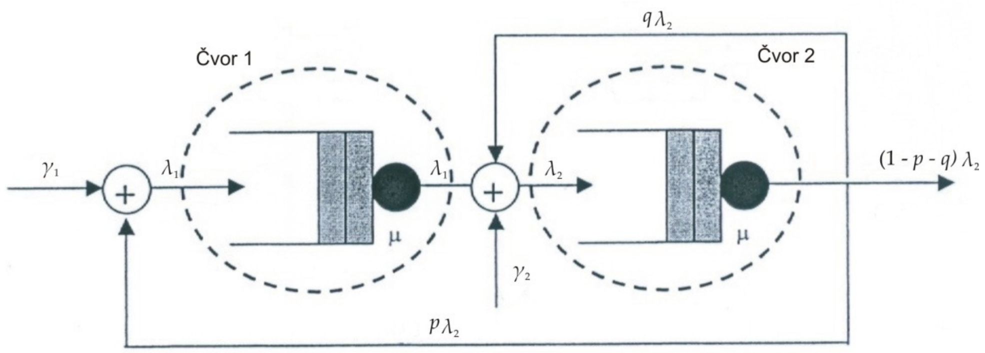
Treba uočiti da član u uglatim zagradama odgovara srednjem kašnjenju poruke kod svakog prolaska kroz čvorove 1 i 2, dok je multiplikacijski faktor $1/(1 - p)$ broj višekratnog prolaska poruka kroz oba čvora kao rezultat postojanja povratne veze.

47. Za mrežu redova prikazanu na slici treba odrediti uvjete stabilnosti za različite čvorove (redove čekanja) i srednje kašnjenje poruke od ulaska do izlaska iz mreže. Ulazni tokovi iz okoline mreže su Poissonovi sa srednjim brzinama γ_1 i γ_2. Vremena posluživanja poruka su neovisna i ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi s jednakom srednjom brzinom μ u oba čvora. Čvorovi imaju beskonačne spremnike. Izlazni tok iz čvora 2 se slučajno dijeli tako da se s vjerojatnošću p vraća u čvor 1, a s vjerojatnošću q u čvor 2 ($0 < p, q < 1$).



Rješenje:

Uz uvjete stabilnosti srednje ulazne i izlazne brzine za svaki čvor su jednake. Ako s λ_1 i λ_2 označimo ukupne dolazne brzine za čvorove 1 i 2, tada možemo napisati jednadžbe srednjih brzina za sve točke stapanja (sumiranja) tokova u mreži.



$$\begin{cases} \lambda_1 = \gamma_1 + p\lambda_2 \\ \lambda_2 = \gamma_2 + \lambda_1 + q\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{\gamma_2 p + (1-q)\gamma_1}{1-p-q} \\ \lambda_2 = \dfrac{\gamma_1 + \gamma_2}{1-p-q} \end{cases}$$

Uvjeti Jacksonovog teorema su ispunjeni pa čvorove 1 i 2 možemo proučavati kao modele $M/M/1$. Oba čvora su stabilna ako su ispunjeni uvjeti: $\rho_1 = \lambda_1/\mu < 1$ i $\rho_2 = \lambda_2/\mu < 1$. Srednji broj poruka u čvorovima 1 i 2 je

$$N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1} \quad \text{i} \quad N_2 = \frac{\rho_2}{1-\rho_2}$$

Srednje kašnjenje poruke od ulaska u mrežu do izlaska iz mreže može se dobiti primjenom Littleovog teorema na cijelu mrežu:

$$T = \frac{N_1 + N_2}{\gamma_1 + \gamma_2}$$

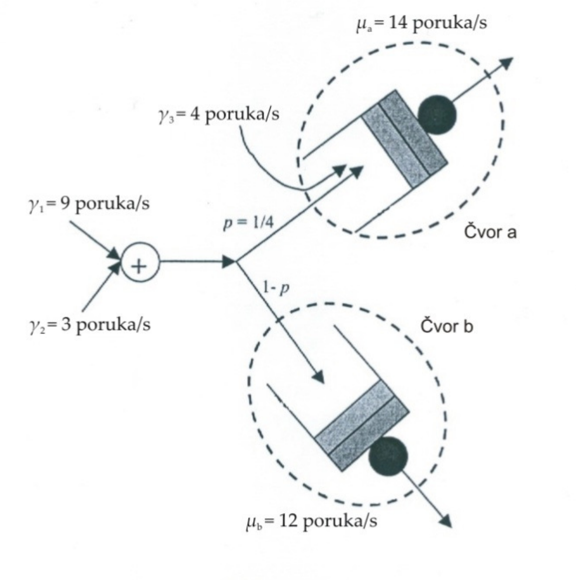
48. U telekomunikacijskoj (telefonskoj) mreži upravljanje prihvaćanjem poziva (veza) iz okoline mreže obavlja se odbacivanjem (blokiranjem) viška ponuđenog prometa. Uz poznatu vjerojatnost odbacivanja (blokiranja) poziva p_B, poznati ukupni ulazni promet čija je srednja brzina γ i ukupni srednji broj poziva u čitavoj mreži N potrebno je odrediti srednje kašnjenje kroz mrežu tipičnog prihvaćenog poziva.

Rješenje:

Primjenimo Littleov teorem na cijelu mrežu uz pretpostavku da su svi čvorovi (tj. redovi čekanja) stabilni a srednja brzina (intenzitet) dolazaka poziva u mrežu je $\gamma^* = \gamma(1 - p_B)$. Traženo kašnjenje je

$$T = \frac{N}{\gamma^*} = \frac{N}{\gamma(1-p_B)}$$

49. Za mrežu redova prikazanu na slici treba odrediti srednji broj poruka u svim redovima i ukupno srednje kašnjenje poruke od njenog ulaska do izlaska iz mreže. Ulazni procesi su Poissonovi i neovisni.



Rješenje:

Svi redovi u mreži su sustavi *M*/*M*/1 zato jer: (a) svi su ulazni procesi Poissonovi, (b) suma neovisnih Poissonovih procesa je Poissonov proces, (c) podjela je vjerojatnosna pa su podjeljeni procesi Poissonovi, (d) mreža je aciklična i (e) svi redovi imaju beskonačni spremnik (nema blokiranja).

Broj poruka N_a i N_b te intenziteti prometa ρ_a i ρ_b u čvorovima a i b su za sustav *M*/*M*/1:

$$\lambda_a = \gamma_3 + p(\gamma_1 + \gamma_2), \quad \lambda_b = (1-p)(\gamma_1 + \gamma_2)$$

$$\rho_a = \frac{\lambda_a}{\mu_a} = \frac{\gamma_3 + p(\gamma_1 + \gamma_2)}{\mu_a} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} < 1, \quad \rho_b = \frac{\lambda_b}{\mu_b} = \frac{(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2)}{\mu_b} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} < 1$$

$$N_a = \frac{\rho_a}{1-\rho_a} = 1 \text{ poruka}, \quad N_b = \frac{\rho_b}{1-\rho_b} = 3 \text{ poruka}$$

Oba su reda stabilna. Ukupan broj poruka u mreži je $N = N_a + N_b = 4$ poruka. Pomoću Littleovog teorema izračunavamo ukupno srednje kašnjenje poruke T od njenog ulaska do izlaska iz mreže:

$$T = N/\gamma = (N_a + N_b)/(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) = 4/16 = 1/4 \text{ s}$$

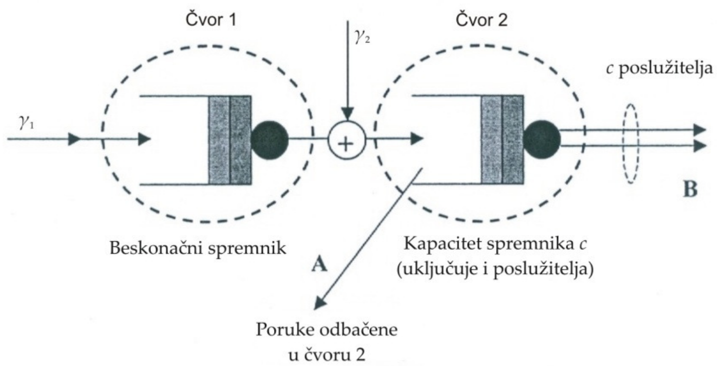
Srednje kašnjenje T može se također izračunati tako da se uzima u razmatranje težinska suma srednjih kašnjenja kroz pojedini red. Težina w_a za čvor a je vjerojatnost da novi dolazak (iz okoline mreže, tj. vanjski dolazak) prođe kroz čvor a. Slično je definirana i težina w_b za čvor b.

$$w_a = \frac{\lambda_a}{\gamma} = \frac{\gamma_3 + p(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}, \qquad w_b = \frac{\lambda_b}{\gamma} = \frac{(1-p)(\gamma_1 + \gamma_2)}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}$$

T se dobiva primjenom Littleove formule na svaki čvor:

$$T = w_a T_a + w_b T_b = w_a \frac{N_a}{\lambda_a} + w_b \frac{N_b}{\lambda_b} = \frac{N_a + N_b}{\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3}.$$

50. Za mrežu redova prikazanu na slici znamo: (1) Dolazni procesi poruka za čvorove 1 i 2 su neovisni i ravnaju se po Poissonovoj razdiobi sa srednjim brzinama λ_1 i λ_2. (2) Čvor 1 ima beskonačni spremnik a vrijeme posluživanja poruka ravna se po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom brzinom μ. (3) Čvor 2 ima spremnik veličine c, broj poslužitelja je c a vrijeme posluživanja ravna se po općoj razdiobi sa srednjom brzinom $E[X]$. Treba odrediti srednji broj poruka u svakom čvoru i srednje kašnjenje T od ulaska poruke u mrežu do trenutka njenog napuštanja mreže bilo u točki A ili u točki B.



Rješenje:

Čvor 1 je sustav M/M/1. Uz pretpostavku da je $\rho_1 = \gamma_1/\mu < 1$ erl čvor 1 je stabilan a izlazni je proces i dalje Poissonov srednje brzine γ_1 (Burkeov teorem). Neovisni Poissonovi procesi srednjih brzina γ_1 i γ_2 sumiraju se na ulasku u čvor 2. Rezultirajući proces je i dalje Poissonov sa srednjom brzinom $\gamma_1 + \gamma_2$. Budući da se vrijeme posluživanja u čvoru 2 ravna po općoj razdiobi moguće je čvor 2 modelirati kao sustav s gubicima $M/G/c/c$ koji je opisan s jednakom razdiobom vjerojatnosti kao i ekvivalentni Markovljev sustav $M/M/c/c$ s intenzitetom prometa $\rho_2 = (\gamma_1 + \gamma_2)E[X]$. Vjerojatnost blokiranja p_B za poruke koje dođu kad su svi poslužitelji zauzeti određuje se po poznatoj Erlang-B formuli.

Srednji brojevi poruka N_1 i N_2 u čvorovima 1 i 2 određeni su pomoću poznatih izraza za sustave $M/M/1$ i $M/M/c/c$:

$$N_1 = \frac{\rho_1}{1-\rho_1}, \qquad N_2 = (1-p_B)\rho_2, \qquad p_B = \frac{\rho_2^c}{c!\sum_{i=0}^{c}\frac{\rho_2^i}{i!}}$$

Srednja kašnjenja T_1 i T_2 poruke prilikom njenog prolaska kroz čvor 1 i 2 dobivamo pomoću Littleovog teorema:

$$T_1 = \frac{N_1}{\gamma_1}, \qquad T_2 = \frac{N_2}{(1-p_B)(\gamma_1+\gamma_2)} \equiv \mathrm{E}[X]$$

Da bi odredili srednje kašnjenje poruke od ulaza do izlaza (A ili B) moramo razmatrati dva različita slučaja ovisna o mjestu ulaska poruke u mrežu:

1. Poruke ulaze u mrežu u čvoru 1: to se događa s vjerojatnošću $\gamma_1/(\gamma_1 + \gamma_2)$ a pripadno kašnjenje poruke je $T_1 + (1 - p_B)T_2$.
2. Poruke ulaze u mrežu u čvoru 2: to se događa s vjerojatnošću $\gamma_2/(\gamma_1 + \gamma_2)$ a pripadno kašnjenje poruke je $p_B \times 0 + (1 - p_B)T_2 = (1 - p_B)T_2$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\left[T_1+(1-p_B)T_2\right]+\frac{\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\left[(1-p_B)T_2\right] \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}T_1+(1-p_B)T_2 \\ &= \frac{\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{N_1}{\gamma_1}+(1-p_B)\frac{N_2}{(\gamma_1+\gamma_2)(1-p_B)} \\ &= \frac{N_1+N_2}{\gamma_1+\gamma_2} \end{aligned}$$

Gornji izraz za T mogli smo dobiti i primjenom Littleovog teorema na cijelu mrežu od dva čvora u kojoj je ukupno $N_1 + N_2$ poruka, a ukupna srednja brzina (vanjskih) dolazaka iznosi $\gamma_1 + \gamma_2$.

Uvrštavanjem vrijednosti za N_1 i N_2 srednje kašnjenje T možemo izraziti i kao:

$$T = \frac{N_1+N_2}{\gamma_1+\gamma_2} = \frac{\dfrac{\rho_1}{1-\rho_1}+\rho_2(1-p_B)}{\gamma_1+\gamma_2}$$

51. Zadnje dvije faze u proizvodnji vozila su ugradnja motora i montiranje guma. Prosječno 54 vozila u jednom satu zahtjeva te dvije operacije. Jedan radnik montira motor i on može poslužiti prosječno 60 vozila u svakom satu. Nakon montiranja motora vozilo odlazi u radionicu gdje čeka da mu se monitaraju gume. Tri radnika rade na montaži guma. Svaki radnik poslužuje jedno vozilo i može montirati gume na vozilo za prosječno tri minute. Međudolazna vremena i vremena posluživanja su eksponencijalna. (a) Odredite srednju duljinu reda i srednje vrijeme čekanja u svakoj radionici (montaža motora, montaža guma). (b) Izračunajte ukupno očekivano vrijeme koje vozilo provede čekajući na posluživanje.

Rješenje:

Model ove proizvodne linije su dva poslužiteljska sustava *M*/*M*/1 i *M*/*M*/3 spojena u seriju (tandem) sa sljedećim parametrima: $\lambda = 54$ auto/h, $\mu_1 = 60$ auto/h, $\mu_2 = 20$ auto/h.

(a) Budući je $\lambda < \mu_1$ i $\lambda < 3\mu_2$ oba su poslužiteljska sustava stabilna pa možemo primjeniti Jacksonov teorem.
Za prvu fazu proizvodnje (montaža motora) imamo $\rho_1 = 54/60 = 0.9$ i srednju duljinu reda i srednje vrijeme čekanja:

$$N_Q = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1^2} = \frac{0.9^2}{1-0.9} = 8.1 \text{ vozilo}, \qquad W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{8.1}{54} = 0.15 \text{ h}$$

Za drugu fazu proizvodnje (montaža guma) imamo $\rho_2 = 54/(3\times20) = 0.9$. Za sustav *M*/*M*/*c* može se pokazati da je vjerojatnost zauzeća svih *c* poslužitelja:

$$P(j \geq c) = \frac{(c\rho_2)^c p_0}{c!(1-\rho_2)}, \quad p_0 = \left[\sum_{i=0}^{i=c-1} \frac{(c\rho_2)^i}{i!} + \frac{(c\rho_2)^c}{c!(1-\rho_2)}\right]^{-1}, \quad \rho_2 = \frac{\lambda}{c\mu_2}$$

Izračunamo

$P(j \geq 3) = 0.83$

i ostale tražene parametre:

$$N_Q = \frac{P(j \geq c)\rho_2}{1-\rho_2} = \frac{0.83 \times 0.9}{1-0.9} = 7.47 \text{ vozila}, \quad W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{7.47}{54} = 0.138 \text{ h}$$

(b) Ukupno očekivano vrijeme koje vozilo provede čekajući montažu motora i guma je 0.15 + 0.138 = 0.288 sati (oko 17 min i 17 s)

52. Mreža redova se sastoji od dva poslužitelja. Iz okoline mreže dolazi prosječno u svakom satu 8 korisnika u čvor 1 i 17 korisnika u poslužitelj 2. Međudolazna vremena ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi. Poslužitelj 1 može poslužiti prosječno 20 korisnika u svakom satu, a poslužitelj 2 prosječno 30 korisnika u svakom satu. Vremena posluživanja ravnaju se po eksponencijalnoj razdiobi. Nakon obavljenog posluživanja u čvoru 1 polovica korisnika napušta mrežu, a polovica korisnika ide u čvor 2. Nakon obavljenog posluživanja u čvoru 2, ¾ korisnika je kompletiralo posluživanje a ¼ korisnika se vraća u poslužitelj 1. (1) Koliki dio vremena je poslužitelj 1 nezauzet ? (2) Odredite očekivani broj korisnika u svakom poslužitelju. (3) Odredite prosječno vrijeme boravka korisnika u mreži. (4) Kakvi su odgovori na (1)-(3) ako se srednja brzina posluživanja poslužitelja 2 smanji na 20 korisnika u satu.

Rješenje:

To je otvorena mreža redova sa srednjim vanjskim brzinama $\gamma_1 = 8$ korisnik/h i $\gamma_2 = 17$ korisnik/h i parametrima $\mu_1 = 20$ korisnik/h, $\mu_2 = 30$ korisnik/h, $p_{12} = 0.5$, $p_{21} = 0.25$, $p_{11} = p_{22} = 0$. Srednje ulazne brzine λ_1 i λ_2 dobivamo rješavanjem prometnih jednadžbi $\lambda_1 = \gamma_1 + p_{21}\lambda_2 = 8 + 0.25\lambda_2$ i $\lambda_2 = \gamma_2 + p_{12}\lambda_1 = 17 + 0.5\lambda_1$. Dobivamo: $\lambda_1 = 14$ korisnik/h i $\lambda_2 = 24$ korisnik/h.

(1) Poslužitelj 1 je model $M/M/1$ s $\lambda_1 = 14$ korisnik/h, $\mu_1 = 20$ korisnik/h, $\rho_1 = 0.7$. Imamo $p_0 = 1 - \rho_1 = 1 - 0.7 = 0.3$, tj. poslužitelj 1 je slobodan 30% vremena.
(2) Broj korisnika u poslužitelju 1: $N_1 = \lambda_1/(\mu_1 - \lambda_1) = 14/(20 - 14) = 7/3$. Broj korisnika u poslužitelju 2: $N_2 = \lambda_2/(\mu_2 - \lambda_2) = 24/(30 - 24) = 4$. Srednji broj korisnika prisutnih u mreži je $N = N_1 + N_2 = 19/3$.
(3) Pomoću Littleove formule dobivamo: $T = N/\gamma = (N_1 + N_2)/(\gamma_1 + \gamma_2) = (19/3)/25 = 19/75$ h.
(4) U tom slučaju je $\mu_2 = 20 < \lambda_2$, tj. čvor 2 je nestabilan i ne postoji stacionarno stanje.

53. Zadana je Jacksonova mreža redova s tri poslužiteljska sustava (čvora) čiji su parametri zadani u tablici. Izračunajte najvažnije parametre performansi za tu mrežu.

Čvor j	c_j	μ_j	γ_j	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}
1	1	10	1	0	0.1	0.4
2	2	10	4	0.6	0	0.4
3	1	10	3	0.3	0.3	0

Rješenje:

Podsjetimo, Jacksonova mreža je sustav od m poslužiteljskih sustava (čvorova) pri čemu svaki sustav i (i = 1, 2,..., m) ima (1) beskonačni spremnik, (2) c_i poslužitelja s eksponencijalnom razdiobom vremena posluživanja i parametrom μ_i i (3) korisnici dolaze u mrežu iz njene okoline sukladno Poisonovom procesu s parametrom γ_i. Korisnik koji napušta sustav (čvor) i se usmjerava prema sljedećem sustavu (čvoru) j (j = 1, 2,..., m) s vjerojatnosti p_{ij} ili napušta sustav (čvor) s vjerojatnosti

$$q_i = 1 - \sum_{j=1}^{m} p_{ij}$$

Svaka takva mreža ima sljedeće ključno svojstvo: u stacionarnom stanju svaki sustav (čvor) j (j = 1, 2,..., m) u Jacksonovoj mreži ponaša se kao *neovisni* poslužiteljski sustav $M/M/c$ s dolaznom brzinom:

$$\lambda_j = \gamma_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i p_{ij} \qquad \rho_j = \frac{\lambda_j}{c_j \mu_j} < 1$$

Uvrštavanjem zadanih parametara u formulu za λ_j, j = 1, 2,..., m, dobivamo:

$$\lambda_1 = 1 + 0.1\lambda_2 + 0.4\lambda_3$$
$$\lambda_2 = 4 + 0.6\lambda_1 + 0.4\lambda_3$$
$$\lambda_3 = 3 + 0.3\lambda_1 + 0.3\lambda_2$$

Rješenje gornjeg sustava jednadžbi je $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 10$ i $\lambda_3 = 15/2$.

Svaki sustav posluživanja (čvor) i (i = 1, 2, 3) mreže možemo sada analizirati kao neovisan model $M/M/c$:

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{c_i \mu_i} = \begin{cases} \frac{1}{2} & i = 1 \\ \frac{1}{2} & i = 2 \\ \frac{3}{4} & i = 3 \end{cases}$$

$$P_{n_1} = (1-\rho_1)\rho_1^{n_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1} \qquad \text{čvor 1}$$

$$P_{n_2} = \begin{cases} \frac{1}{3} & n_2 = 0 \\ \frac{1}{3} & n_2 = 1 \\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_2-1} & n_2 \geq 2 \end{cases} \qquad \text{čvor 2}$$

$$P_{n_3} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n_3} \qquad \text{čvor 3}$$

Znajući razdiobu P_{ni} broja korisnika $N_i = n_i$ u svakom sustavu (čvoru) *zajednička* vjerojatnost (n_1, n_2, n_3) jednostavno je produktni oblik rješenja:

$$P\{(N_1,N_2,N_3)=(n_1,n_2,n_3)\}=P_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}$$

Očekivani broj korisnika N_i u svakom čvoru je N_1 = 1, N_2 = 4/3 i N_3 = 3, a očekivani ukupni broj korisnika u čitavoj mreži je $N = N_1 + N_2 + N_3 = 16/3$. Ukupna brzina dolazaka je $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 8$ pa primjenom Littleove formule dobivamo da je ukupno očekivano kašnjenje (ukupno vrijeme boravka u mreži) tipičnog korisnika $T = N/\gamma = 2/3$.

54. Zadana je Jacksonova mreža redova s tri poslužiteljska sustava (čvora) čiji su parametri zadani u tablici.

Čvor j	c_j	μ_j	γ_j	p_{1j}	p_{2j}	p_{3j}
1	1	40	10	0	0.3	0.4
2	1	50	15	0.5	0	0.5
3	1	30	3	0.3	0.2	0

(a) Odredite ukupnu brzinu dolazaka u svaki čvor.
(b) Odredite stacionarne razdiobe broja korisnika u čvorovima 1, 2 i 3, te produktni oblik rješenja za zajedničku razdiobu broja korisnika u odgovarajučim čvorovima.
(c) Kolika je vjerojatnost da su u svim čvorovima redovi čekanja prazni (nema korisnika koji bi čekali posluživanje)?
(d) Odredite očekivani ukupni broj korisnika u mreži.
(e) Odredite očekivano ukupno kašnjenje (vrijeme boravka) tipičnog korisnika.

Rješenje:

(a) $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = 40$, $\lambda_3 = 20$
(b)

$$P_{n_1}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n_1},\quad P_{n_2}=\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^{n_2},\quad P_{n_3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n_3}$$

$$P\{(N_1,N_2,N_3)=(n_1,n_1,n_1)\}=P_{n_1}P_{n_2}P_{n_3}=\frac{1}{60}\left(\frac{3}{4}\right)^{n_1}\left(\frac{4}{5}\right)^{n_2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n_3}$$

(c) P(svi redovi prazni) = P(red 1 prazan)×P(red 2 prazan)×P(red 3 prazan)

$$= (p_0 + p_1)_1 \times (p_0 + p_1)_2 \times (p_0 + p_1)_3$$

$$= \frac{7}{16}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{9}=\frac{7}{80}=0.088$$

(d) $N = N_1 + N_2 + N_3 = 3 + 4 + 2 = 9$
(e) $T = N/(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) = 9/28 = 0.321$

55. Analizirajte sustav sastavljen od dva poslužitelja $M/M/1$ spojena u seriju. Sva su vremena posluživanja neovisna i imaju eksponencijalnu razdiobu sa srednjom vrijednosti 3 min u poslužitelju 1 i 4 min u poslužitelju 2. Ulaz u poslužitelj 1 je Poissonov proces sa srednjom brzinom 10 korisnika u svakom satu.
(a) Odredite stacionarnu razdiobu broja korisnika u poslužitelju 1 i 2, te produktni oblik rješenja za broj korisnika u sustavu.
(b) Kolika je vjerojatnost da su oba poslužitelja slobodna (nezauzeta)?
(c) Odredite ukupni očekivani broj korisnika i očekivano ukupno vrijeme boravka (uključuje i vrijeme posluživanja) tipičnog korisnika u sustavu.

Rješenje:

(a) $\lambda = 10, \mu_1 = 20, \mu_2 = 15 \Rightarrow \rho_1 = 1/2, \rho_1 = 2/3$

$$P_{n_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1}, \quad P_{n_2} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n_2}, \quad P\{(N_1, N_2) = (n_1, n_2)\} = P_{n_1} P_{n_2} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n_1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n_2}$$

(b) $P\{(N_1, N_2) = (0,0)\} = \dfrac{1}{6}$

(c) $N = N_1 + N_2 = 1 + 2 = 3$, $T = T_1 + T_2 = 1/10 + 2/10 = 0.3$ h = 18 min.

56. Poslužiteljski sustav $M/M/1$ je opisan srednjim brzinama $\lambda = 5$ i $\mu = 8$. Odredite parametre performansi N, N_Q, T i W za sustave (a) $M/M/1$, (b) $M/G/1$, (c) $M/D/1$ i (d) komentirajte rezultate.

Rješenje:

(a) $M/M/1$:
Uz $\sigma^2 = 1/\mu^2$ dobivamo:

$$N = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{5}{3}; \quad N_Q = N - \rho = \frac{25}{24}; \quad T = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{3}; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{5}{24}$$

(b) $M/G/1$:
Parametri λ i μ su isti, ali za razdiobu vremena posluživanja S imamo $E(S) = 1/\mu = 1/8$ i var(S) $= \sigma^2 = 1/64$, $\rho = 5/8$:

$$N_Q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{25}{24}; \quad N = N_Q + \rho = \frac{5}{3}; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{5}{24}; \quad T = W + \frac{1}{\mu} = \frac{N}{\lambda} = \frac{1}{3}$$

(c) $M/D/1$:
$E(S) = 1/\mu = 1/8$ i var(S) $= \sigma^2 = 0$, $\rho = 5/8$:

$$N_Q = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{25}{48}; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{5}{48}$$

(d) U sustavu $M/D/1$ tipični korisnik čeka u redu upola kraće nego u sustavu $M/M/1$ s identičnim brzinama dolazaka i posluživanja. Čak ako i ne smanjujemo srednje vrijeme posluživanja, smanjivanjem varijabilnosti vremena posluživanja smanjuje se veličina reda čekanja i vrijeme čekanja.

57. Zadan je poslužiteljski sustav $M/G/1$.
(a) Usporedite očekivano vrijeme čekanja u redu ako je razdioba vremena posluživanja (1) eksponencijalna, (2) konstanta i (3) Erlangova sa standardnom devijacijom jednakom polovici vrijednosti između vrijednosti za konstantni i eksponencijalni slučaj.
(b) Kakve će biti posljedice na očekivano vrijeme čekanja u redu i očekivanu duljinu reda čekanja ako se oba parametra λ i μ udvostruče za razdiobe vremena posluživanja iz (a)?

Rješenje:

(a) Osnovni parametri za sustav $M/G/1$ su (Pollaczek-Khintchine):

$$N_Q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}; \quad N = N_Q + \rho; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda}; \quad T = \frac{N}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu}$$

(1) $M/M/1$:
Možemo koristiti izraze za $M/G/1$ uz $\sigma = 1/\mu$:

$$W_{\text{exp}} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

(2) $M/D/1$:
Možemo koristiti izraze za $M/G/1$ uz $\sigma = 0$:

$$W_{\text{const}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

(3) $M/E_k/1$:
Možemo koristiti izraze za M/G/1 uz $\sigma = (½)(0 + 1/\mu) = 1/(2\mu) \Rightarrow \sigma^2 = 1/(4\mu^2) \Rightarrow k = 4$:

$$W_{\text{Erlang}} = \frac{1+k}{2k}\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1+4}{8}\frac{\lambda}{\lambda(\mu-\lambda)} = \frac{5}{8}\frac{\lambda}{\lambda(\mu-\lambda)}$$

Dakle, vidimo da vrijedi: $W_{\text{exp}} = 2W_{\text{const}} = (8/5)W_{\text{Erlang}}$.

(b) Označimo s β koeficijente 1, 1/2 i 8/5 za eksponencijalnu, konstantnu i Erlangovu razdiobu u izrazima dobivenim u (a). Neka je $\lambda_{\text{b}} = 2\lambda_{\text{a}}$ i $\mu_{\text{b}} = 2\mu_{\text{a}}$. Sada imamo:

$$W_{\text{a}} = \beta\left[\frac{\lambda_{\text{a}}}{\mu_{\text{a}}(\mu_{\text{a}}-\lambda_{\text{a}})}\right], \quad \beta \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right\}$$

$$W_{\text{b}} = \beta\left[\frac{2\lambda_{\text{a}}}{2\mu_{\text{a}}(2\mu_{\text{a}}-2\lambda_{\text{a}})}\right] = \frac{W_{\text{a}}}{2}$$

$$N_Q^{\text{b}} = \lambda_{\text{b}}W_{\text{b}} = 2\lambda_{\text{a}}W_{\text{a}}/2 = \lambda_{\text{a}}W_{\text{a}} = N_Q^{\text{a}}$$

Vidimo da je očekivano vrijeme čekanja prepolovljeno, a očekivana duljina reda je ostala nepromijenjena.

58. Zadan je poslužiteljski sustav $M/G/1$ gdje je σ^2 varijanca vremena posluživanja. Uz svaku tvrdnju označite je li ona točna ili nije te obrazložite svoj odgovor.
(a) Porastom σ^2 (uz fiksni λ i μ) porasti će N i N_Q dok će W i T ostati nepromjenjeni.
(b) Kod izbora između sporog (mali μ i σ^2) i brzog (veliki μ i σ^2) poslužitelja spori je uvijek pobjednik jer osigurava manji N_Q.
(c) Uz fiksni λ i μ vrijednost za N_Q je dvostruko veća kod eksponencijalne razdiobe vremena posluživanja nego kod konstantnog vremena posluživanja.
(d) Između svih mogućih razdioba vremena posluživanja (uz fiksni λ i μ) eksponencijalna razdioba daje najveću vrijednost za N_Q.

Rješenje:

Za $M/G/1$ imamo (Pollaczek-Khintchine):

$$N_Q = \frac{\lambda^2\sigma^2 + \rho^2}{2(1-\rho)}; \quad N = N_Q + \rho; \quad W = \frac{N_Q}{\lambda}; \quad T = \frac{N}{\lambda} = W + \frac{1}{\mu}$$

(a) Pogrešno: rasti će N i N_Q, ali kad oni rastu tada rastu i W i T.
(b) Pogrešno: kad su μ i σ^2 mali, N_Q nije nužno mali.
(a) Točno: za eksponencijalno posluživanje je $N_Q = \rho^2/(1-\rho)$ jer je $\sigma^2 = 1/\mu^2$;
za konstantno posluživanje je $N_Q = \rho^2/[2(1-\rho)]$ jer je $\sigma^2 = 0$.
(d) Pogrešno: lako je pronaći razdiobu sa $\sigma^2 > 1/\mu^2$.

59. U poslužiteljskom sustavu s Poissonovim ulazom poslužitelj treba obaviti dva različita posla i to uzastopno jedan iza drugog tako da je ukupno vrijeme posluživanja korisnika jednako sumi vremena posluživanja pojedinih poslova (oni su statistički neovisni).
(a) Pretpostavimo da se trajanje prvog posla ravna po eksponencijalnoj razdiobi sa srednjom vrijednosti 3 minuta, a trajanje drugog posla po Erlangovoj razdiobi sa srednjom vrijednosti 9 minuta i parametrom oblika $k = 3$. Koji model posluživanja treba koristiti da bi se opisao ovakav sustav?
(b) Pretpostavimo da je dio (a) modificiran tako da se i trajanje prvog posla ravna po Erlangovoj razdiobi s parametrom oblika $k = 3$ (srednja vrijednost ostaje 3 minute). Koji model posluživanja treba koristiti da bi se opisao ovakav sustav?

Rješenje:

(a) $M/E_4/1$: Poissonov ulaz, Erlangovo posluživanje uz $\mu = 1/12$ i $k = 4$.
(b) $M/G/1$: Poissonov ulaz, općenito posluživanje uz srednju vrijednos 3 + 9 = 12 min ($\mu = 1/12$) i varijancu $\sigma^2 = 1/(k\mu_1^2) + 1/(k\mu_2^2) = (1/k)[1/\mu_1^2 + 1/\mu_2^2] = (1/3)(3^2 + 9^2) = 30$.

Napomene: Erlangova razdioba E_k, srednja vrijednost i varijanca su:

$$f(x) = \frac{(\mu k)^k}{(k-1)!} x^{k-1} e^{-k\mu x} \quad (x \geq 0), \quad E(X) = \frac{1}{\mu}, \quad \sigma^2 = \frac{1}{k\mu^2}$$

μ i k su pozitivni parametri, a k je još i cijeli broj (ako k nije cijeli broj govorimo o *gama razdiobi*). Parametar k opisuje stupanj varijabilnosti vremena posluživanja obzirom na srednju vrijednost i zove se *parametar oblika* ili *broj faza*. Pretpostavimo da su $X_1, X_2, \ldots, X_k$ neovisne slučajne varijable s identičnim eksponencijalnim razdiobama srednje vrijednosti $1/(k\mu)$. Tada slučajna varijabla $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_k$ ima Erlangovu razdiobu s parametrima μ i k. Dakle, ukupno posluživanje korisnka može se razmatrati ne kao obavljanje jednog specificiranog posla već kao izvršavanje sekvencije of k poslova. Ako ti poslovi imaju eksponencijalnu razdiobu trajanja, tada će ukupno vrijeme posluživanja imati Erlangovu razdiobu. To će biti slučaj, primjerice, kad poslužitelj treba obaviti isti eksponencijalni posao k puta za svakog korisnika (zato takvo posluživanje ponekad zovemo *k-fazno*).

Erlangova razdioba često je jako dobra aproksimacija empirijski dobivenih razdioba vremena posluživanja. Primjerice, eksponencijalna i degenerirana (konstanta) razdioba specijalni su slučaj Erlangove za $k = 1$ i $k = \infty$. Za vrijednosti k između 1 i ∞ dobivaju se razdiobe sa srednjom vrijednosti $1/\mu$, modom $(k-1)/(k\mu)$ i varijancom $1/(k\mu^2)$.

Parametre za model $M/E_k/1$dobivamo kao specijalni slučaj modela $M/G/1$ u kojem je $\sigma^2 = 1/(k\mu^2)$.

$$N_Q = \frac{\lambda^2 /(k\mu^2) + \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$W = \frac{N_Q}{\lambda} = \frac{1+k}{2k} \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$$T = W + \frac{1}{\mu}$$

$$N = \lambda T$$

60. Analizirajte otvorenu Jacksonovu mrežu sastavljenu od N čvorova povezanih u prsten. Konfiguracija mreže je simetrična: nakon završetka posluživanja u nekom čvoru korisnik može ići u bilo koji od dva njegova susjeda s vjerojatnosti 0.3 ili napustiti mrežu s vjerojatnosti 0.4. Vanjske dolazne brzine za sve čvorove su jednake γ/N; srednja trajanje posluživanja u svim čvorovima su jednaka 1.
Izračunajte ukupnu brzinu dolazaka u svaki čvor i uvjet koji γ mora zadovoljiti da bi mreža bila stabilna. Odredite ukupni srednji broj korisnika u mreži, srednje vrijeme odziva, ukupno srednje vrijeme potrebno za posluživanje pojedinog korisnika i ukupni srednji broj posluživanja pojedinog korisnika tijekom njegovog boravka u mreži.