Sveučilište u Zagrebu
Fakultet elektrotehnike i računarstva
Zavod za elektroniku, mikroelektroniku, računalne i inteligentne sustave

Andro Milanović, Dejan Škvorc

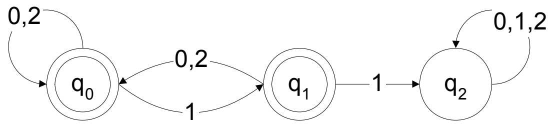
Uvod u teoriju računarstva

Zadaci za vježbu

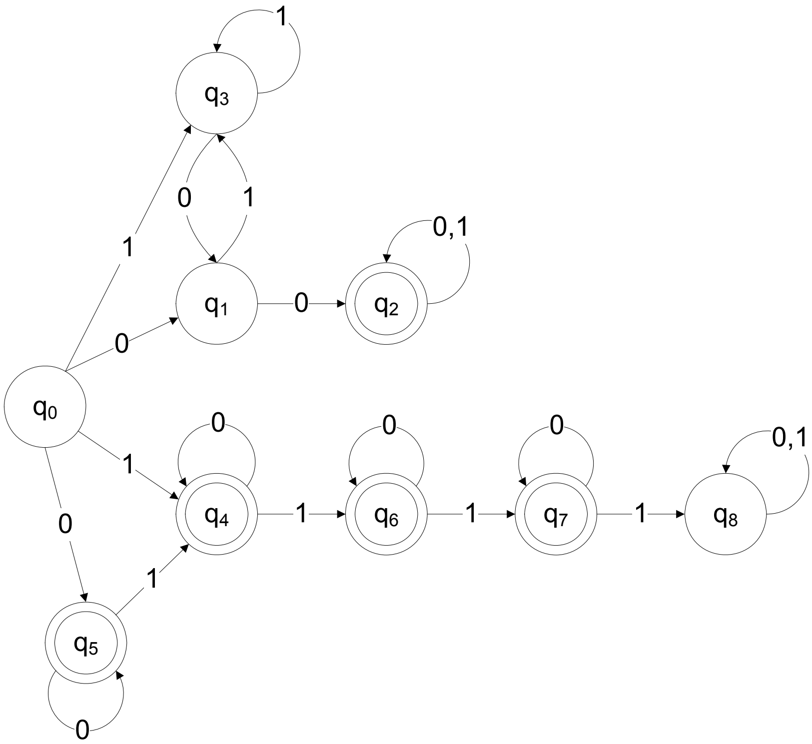
Zagreb, veljača 2007.

1. **Jezik L nad abecedom {0, 1, 2} sadrži sve nizove u kojima nema uzastopnog ponavljanja znaka 1. Konstruirati konačni automat koji prihvaća nizove iz jezika L.**

   Deterministički konačni automat:



2. **Konstruirati NKA koji prepoznaje sve binarne brojeve za koje vrijedi bar jedan od navedenih uvjeta:**
   a) **u binarnom broju postoje dvije ili više uzastopnih nula**
   b) **suma znakova je manja od 4**



3. **Minimizirati zadani DKA primjenom algoritma podjele stanja (2. algoritam). Automat dodatno smanjiti pretvorbom znakova.**

	a	b	c	d	
q_0	q_0	q_1	q_1	q_2	0
q_1	q_1	q_3	q_2	q_5	0
q_2	q_2	q_5	q_5	q_0	1
q_3	q_7	q_4	q_4	q_0	1
q_4	q_5	q_0	q_0	q_3	0
q_5	q_4	q_0	q_0	q_7	0
q_6	q_3	q_4	q_4	q_8	0
q_7	q_2	q_4	q_4	q_0	1
q_8	q_8	q_7	q_3	q_6	1

Pronalaze se nedohvatljiva stanja:

lista dohvatljivih stanja: $\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_5,q_4,q_7\}$
nedohvatljiva stanja su q_6 i q_8

Na osnovu prihvatljivosti izvodi se početna podjela stanja u podskupove:

$G_{11}=\{q_0,q_1,q_4,q_5\}$, $G_{12}=\{q_2,q_3,q_7\}$

Na osnovu analize funkcije prijelaza izvodi se daljnja podjela stanja u podskupove:

$G_{21}=\{q_0,q_4,q_5\}$, $G_{22}=\{q_1\}$, $G_{23}=\{q_2,q_3,q_7\}$

$G_{31}=\{q_0\}$, $G_{32}=\{q_4,q_5\}$, $G_{33}=\{q_1\}$, $G_{34}=\{q_2,q_3,q_7\}$

$G_{41}=\{q_0\}$, $G_{42}=\{q_4,q_5\}$, $G_{43}=\{q_1\}$, $G_{44}=\{q_2,q_3,q_7\}$

Nakon 3. koraka nema novih podjela pa se postupak zaustavlja, a istovjetna stanja su:

$q_4 \equiv q_5$

$q_2 \equiv q_3 \equiv q_7$

Nakon zamjena $q_5 \rightarrow q_4$, $q_3 \rightarrow q_2$ i $q_7 \rightarrow q_2$ te izbacivanja stanja q_6 i q_8 dobiva se minimalni DKA:

	a	b	c	d	
q_0	q_0	q_1	q_1	q_2	0
q_1	q_1	q_2	q_2	q_4	0
q_2	q_2	q_4	q_4	q_0	1
q_4	q_4	q_0	q_0	q_2	0

Stupci za ulazne znakove b i c su isti pa se može provesti pretvorba znakova (transliteracija) kojom se znakovi b i c zamjenjuju znakom e:

	a	e={b,c}	d	
q_0	q_0	q_1	q_2	0
q_1	q_1	q_2	q_4	0
q_2	q_2	q_4	q_0	1
q_4	q_4	q_0	q_2	0

4. Minimizirati zadani DKA primjenom algoritma pronalaženja neistovjetnih stanja (3. algoritam).

	a	**b**	**c**	
q_0	q_4	q_1	q_5	**0**
q_1	q_2	q_3	q_4	**0**
q_2	q_1	q_3	q_2	**1**
q_3	q_4	q_1	q_4	**0**
q_4	q_3	q_1	q_2	**1**
q_5	q_2	q_4	q_1	**1**
q_6	q_3	q_7	q_2	**0**
q_7	q_1	q_4	q_6	**1**

Pronalaze se nedohvatljiva stanja:

lista dohvatljivih stanja: $\{q_0,q_4,q_1,q_5,q_3,q_2\}$
nedohvatljiva stanja su q_6 i q_7

Pronalaženje istovjetnih stanja počinje tako da se u tablici kao neistovjetna označe stanja različite prihvatljivosti:

q_1					
q_2	X	X			
q_3			X		
q_4	X	X		X	
q_5	X	X		X	
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

Provjeravaju se preostali parovi i stvaraju liste:

q_1					
q_2	X	X			
q_3			X		
q_4	X	X		X	
q_5	X	X	X	X	X
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

lista uz $(q_2,q_4)=\{(q_0,q_1),(q_1,q_3)\}$
lista uz $(q_1,q_3)=\{(q_0,q_1),(q_2,q_4)\}$
lista uz $(q_4,q_5)=\{(q_0,q_1),(q_0,q_3)\}$

Zbog neistovjetnosti q_4 i q_5 rješava se lista uz (q_4,q_5)

q_1	X				
q_2	X	X			
q_3	X		X		
q_4	X	X		X	
q_5	X	X	X	X	X
	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4

lista uz $(q_2,q_4)=\{(q_0,q_1),(q_1,q_3)\}$
lista uz $(q_1,q_3)=\{(q_0,q_1),(q_2,q_4)\}$
lista uz $(q_4,q_5)=\{(q_0,q_1),(q_0,q_3)\}$

Istovjetna stanja su:

$q_1 \equiv q_3$

$q_2 \equiv q_4$

Nakon zamjene $q_4 \rightarrow q_2$ i $q_3 \rightarrow q_1$ te izbacivanja q_6 i q_7 dobiva se minimalni DKA:

	a	b	c	
q_0	q_2	q_1	q_5	0
q_1	q_2	q_1	q_2	0
q_2	q_1	q_1	q_2	1
q_5	q_2	q_2	q_1	1

5. Zadani ε-NKA pretvoriti u minimalni DKA.

	a	**b**	**c**	**ε**	
q_0	q_1	q_2	q_1	q_1,q_3	**0**
q_1	q_1,q_2	q_1	q_3	q_2	**0**
q_2	q_2	q_1	q_3	-	**1**
q_3	q_2	-	-	-	**0**

Pretvorba ε-NKA u NKA:

$F'=F\cup q_0$ ako je $F\cap$ε-OKRUŽENJE$(q_0)\neq\varnothing$ pa je q_0' u NKA prihvatljivo, inače $F'=F$
$\delta'(q,a)=\hat{\delta}(q,a)=$ε-OKRUŽENJE($\delta$(ε-OKRUŽENJE$(q)$,a))

ε-OKRUŽENJE$(q_0)=\{q_0,q_1,q_2,q_3\}$
ε-OKRUŽENJE$(q_1)=\{q_1,q_2\}$
ε-OKRUŽENJE$(q_2)=\{q_2\}$
ε-OKRUŽENJE$(q_3)=\{q_3\}$

$\delta'(q_0,a)=$ε-OKRUŽENJE(δ(ε-OKRUŽENJE(q_0),a))= ε-OKRUŽENJE($\delta(\{q_0, q_1, q_2, q_3\},a)$)= ε-OKRUŽENJE($\{q_1, q_2\}$)$=\{q_1, q_2\}$

Dobije se sljedeći NKA:

	a	b	c	
q_0	q_1,q_2	q_1,q_2	q_1,q_2,q_3	1
q_1	q_1,q_2	q_1,q_2	q_3	0
q_2	q_2	q_1,q_2	q_3	1
q_3	q_2	-	-	0

Pretvorba NKA u DKA:

- Prijelazi DKA ostvaruju se unijom prijelaza stanja NKA
- U skup stanja DKA dodaju se samo ona stanja koja su se pojavila u nekom od prijelaza
    - na taj način se odmah uklanjaju nedohvatljiva stanja
- Stanje je prihvatljivo ako je bilo koje podstanje prihvatljivo u NKA

	a	b	c	
$[q_0]$	$[q_1,q_2]$	$[q_1,q_2]$	$[q_1,q_2,q_3]$	1
$[q_1,q_2]$	$[q_1,q_2]$	$[q_1,q_2]$	$[q_3]$	1
$[q_1,q_2,q_3]$	$[q_1,q_2]$	$[q_1,q_2]$	$[q_3]$	1
$[q_3]$	$[q_2]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	0
$[q_2]$	$[q_2]$	$[q_1,q_2]$	$[q_3]$	1
$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	0

Minimizacija DKA:

Zbog načina konstruiranja DKA kojim se u skup stanja dodaju samo dohvatljiva stanja, nedohvatljivih stanja nema pa je dovoljno pronaći istovjetna stanja:

$[q_1,q_2]$	X2				
$[q_1,q_2,q_3]$	X2				
$[q_3]$	X1	X1	X1		
$[q_2]$	X2			X1	
E	X1	X1	X1	X2	X1
	$[q_0]$	$[q_1,q_2]$	$[q_1,q_2,q_3]$	$[q_3]$	$[q_2]$

lista uz $([q_1,q_2],[q_2])=\{([q_1,q_2,q_3],[q_2])\}$

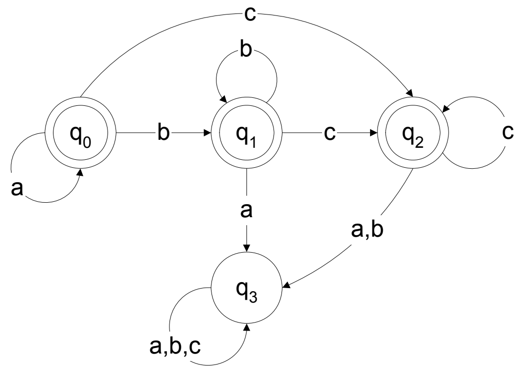
Istovjetna stanja su:

$[q_2] \equiv [q_1,q_2] \equiv [q_1,q_2,q_3]$

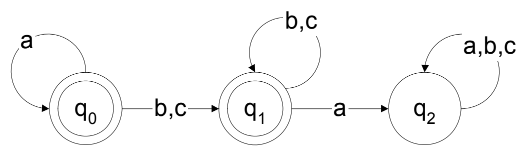
Minimalni DKA nakon zamjena $[q_1,q_2] \rightarrow [q_2]$ i $[q_1,q_2,q_3] \rightarrow [q_2]$:

	a	b	c	
$[q_0]$	$[q_2]$	$[q_2]$	$[q_2]$	1
$[q_2]$	$[q_2]$	$[q_2]$	$[q_3]$	1
$[q_3]$	$[q_2]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	0
$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	$[\varnothing]$	0

6. Konstruirati DKA koji prihvaća jezik $L=L_1 \cap L_2$ ($L_1 \cup L_2$, L_1-L_2, L_2-L_1). Jezik L_1 sastoji se od nizova opisanih regularnim izrazom $r_1=a^*b^*c^*$, a nizovi iz jezika L_2 opisani su regularnim izrazom $r_2=a^*(b+c)^*$.



DKA 1



DKA 2

DKA 2 prihvaća L_2:

	a	b	c	
q_0	q_0	q_1	q_1	1
q_1	q_2	q_1	q_1	1
q_2	q_2	q_2	q_2	0

DKA 1 prihvaća L_1:

	a	b	c	
q_0	q_0	q_1	q_2	1
q_1	q_3	q_1	q_2	1
q_2	q_3	q_3	q_2	1
q_3	q_3	q_3	q_3	0

DKA koji prihvaća presjek, uniju ili razliku jezika:

	a	b	c	$L_1 \cap L_2$	$L_1 \cup L_2$	L_1-L_2	L_2-L_1
$[q_0,q_0]$	$[q_0,q_0]$	$[q_1,q_1]$	$[q_2,q_1]$	1	1	0	0
$[q_1,q_1]$	$[q_3,q_2]$	$[q_1,q_1]$	$[q_2,q_1]$	1	1	0	0
$[q_2,q_1]$	$[q_3,q_2]$	$[q_3,q_1]$	$[q_2,q_1]$	1	1	0	0
$[q_3,q_2]$	$[q_3,q_2]$	$[q_3,q_2]$	$[q_3,q_2]$	0	0	0	0
$[q_3,q_1]$	$[q_3,q_2]$	$[q_3,q_1]$	$[q_3,q_1]$	0	1	0	1

Dobiveni DKA u općem slučaju nisu minimalni!

7. **Regularnim izrazom opisati jezik koji sadrži sve nizove nad abecedom {0, 1, 2} u kojima nema uzastopnih ponavljanja znaka 0.**

$(01+02+1+2)^*(0+\varepsilon)$

ili

$(0+\varepsilon)(10+20+1+2)^*$

8. **Ispitati da li su sljedeći regularni izrazi ekvivalentni:**

a) $a^*(a^++\varepsilon)ab(b^++\varepsilon)^*=a^+b^+$

	Primijenjeni algebarski zakoni
$a^*\underline{(a^++\varepsilon)}ab(b^++\varepsilon)^*$	$x^+ + \varepsilon = x^*$
$=\underline{a^*a^*}ab(b^++\varepsilon)^*$	$x^* x^* = x^*$
$=a^*ab\underline{(b^++\varepsilon)^*}$	$x^+ + \varepsilon = x^*$
$=a^*ab\underline{(b^*)^*}$	$(x^*)^* = x^*$
$=a^*a\underline{bb^*}$	$x x^* = x^+$
$=\underline{a^*a}b^+$	$x^* x = x^+$
$=a^+b^+$	

Regularni izrazi **JESU EKVIVALENTNI**!

b) $a^+(a^*+b^+)^+b^+=a(a+b)^*b$

	Primijenjeni algebarski zakoni
$a^+\underline{(a^*+b^+)^+}b^+$	$x^+ = x x^*$
$=a^+(a^*+b^+)(a^*+\underline{b^+})^*b^+$	$x^+ = x x^*$
$=a^+(a^*+b^+)\underline{(a^*+bb^*)^*}b^+$	$(x^* + yy^*)^* = (x+y)^*$
$=\underline{a^+}(a^*+b^+)(a+b)^*b^+$	$x^+ = x x^*$
$=a\underline{a^*(a^*+b^+)}(a+b)^*b^+$	$x(y+z) = xy + xz$
$=a(\underline{a^*a^*}+a^*b^+)(a+b)^*b^+$	$x^* x^* = x^*$
$=a\underline{(a^*+a^*b^+)}(a+b)^*b^+$	$xy + xz = x(y+z)$
$=aa^*\underline{(\varepsilon+b^+)}(a+b)^*b^+$	$x^+ + \varepsilon = x^*$
$=aa^*b^*(a+b)^*\underline{b^+}$	$x^+ = x^* x$
$=aa^*\underline{b^*(a+b)^*}b^*b$	$y^*(x+y)^* = (x+y)^*$
$=a\underline{a^*(a+b)^*}b^*b$	$x^*(x+y)^* = (x+y)^*$
$=a\underline{(a+b)^*b^*}b$	$(x+y)^* y^* = (x+y)^*$
$=a(a+b)^*b$	

Regularni izrazi **JESU EKVIVALENTNI**!

9. Konstruirati Mooreov automat koji ispisuje ostatak dijeljenja oktalno zapisanog broja brojem 5.

Matematička formula za izračunavanje ostatka:

$ostatak_{n+1}$=($ostatak_n$ * baza + $znamenka_{n+1}$) % djelitelj

$\Rightarrow$ $ostatak_{n+1}$=($ostatak_n$ * 8 + $znamenka_{n+1}$) % 5

Određivanje funkcije prijelaza Mooreovog automata:

$\delta(q_x, a) = q_{(x*8 + a)\%5}$

Određivanje funcije izlaza Mooreovog automata:

$\lambda(q_x) = x$

Mooreov automat:

	0,5	1,6	2,7	3	4	λ
q_0	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	0
q_1	q_3	q_4	q_0	q_1	q_2	1
q_2	q_1	q_2	q_3	q_4	q_0	2
q_3	q_4	q_0	q_1	q_2	q_3	3
q_4	q_2	q_3	q_4	q_0	q_1	4

10. Iz zadanog Mooreovog automata konstruirati Mealyev automat.

	0,5	**1,6**	**2,7**	**3**	**4**	λ
q_0	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	**0**
q_1	q_3	q_4	q_0	q_1	q_2	**1**
q_2	q_1	q_2	q_3	q_4	q_0	**2**
q_3	q_4	q_0	q_1	q_2	q_3	**3**
q_4	q_2	q_3	q_4	q_0	q_1	**4**

Pretvorba Moore$\rightarrow$Mealy

$\delta'(q,a)=\delta(q,a)$
$\lambda'(q,a)=\lambda(\delta(q,a))$

Mealyev automat:

δ'	0,5	1,6	2,7	3	4
q_0	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
q_1	q_3	q_4	q_0	q_1	q_2
q_2	q_1	q_2	q_3	q_4	q_0
q_3	q_4	q_0	q_1	q_2	q_3
q_4	q_2	q_3	q_4	q_0	q_1

λ'	0,5	1,6	2,7	3	4
q_0	0	1	2	3	4
q_1	3	4	0	1	2
q_2	1	2	3	4	0
q_3	4	0	1	2	3
q_4	2	3	4	0	1

11. Iz zadanog Mealyeovog automata konstruirati Mooreov automat.

δ	0	1
q_0	q_0	q_3
q_1	q_1	q_3
q_2	q_2	q_1
q_3	q_2	q_0

λ	0	1
q_0	0	0
q_1	0	1
q_2	1	1
q_3	1	0

Pretvorba Mealy$\rightarrow$Moore

q_0'=[q_0,0] (ne mora biti 0, može biti bilo koji izlazni znak)
$\delta'([q,a],b)=[\delta(q,b), \lambda(q,b)]$
$\lambda'([q,a])=a$

Mooreov automat:

δ'	0	1	λ'
$[q_0,0]$	$[q_0,0]$	$[q_3,0]$	0
$[q_3,0]$	$[q_2,1]$	$[q_0,0]$	0
$[q_2,1]$	$[q_2,1]$	$[q_1,1]$	1
$[q_1,1]$	$[q_1,0]$	$[q_3,1]$	1
$[q_1,0]$	$[q_1,0]$	$[q_3,1]$	0
$[q_3,1]$	$[q_2,1]$	$[q_0,0]$	1

12. Konstruirati gramatiku nad abecedom {0, 1, 2} koja generira nizove u kojima nema uzastopnog ponavljanja podniza 01.

G=(V,T,P,S)
V={S,A,B,C

T={0,1,2}

$S\rightarrow 0A|1S|2S|\varepsilon$
$A\rightarrow 0A|1B|2S|\varepsilon$
$B\rightarrow 0C|1S|2S|\varepsilon$
$C\rightarrow 0A|2S|\varepsilon$

13. Na osnovu zadanog DKA konstruirati konteksno neovisnu gramatiku.

	a	b	c	
q_0	q_0	q_1	q_2	1
q_1	q_2	q_0	q_1	0
q_2	q_1	q_2	q_0	0

DKA $M=(Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ $\Rightarrow$ G=(V,T,P,S)

$V=Q$, $T=\Sigma$, $S=q_0$
$\delta(A,b)=C \Rightarrow A\rightarrow bC$
$A\in F \Rightarrow A\rightarrow\varepsilon$

$S\rightarrow aS|bA|cB|\varepsilon$
$A\rightarrow aB|bS|cA$
$B\rightarrow aA|bB|cS$

14. Iz zadane lijevo-linearne gramatike konstruirati NKA.

S→Ac	**A→Bb**	**B→A**
S→Aab	**A→cab**	**B→ca**
S→Ba	**A→Sb**	**B→Aaba**

Prvo se konstruira nova gramatika G'=(V,T,P',S) u kojoj su produkcije napisane obrnuto:

S→cA	A→bB	B→A
S→baA	A→bac	B→ac
S→aB	A→bS	B→abaA

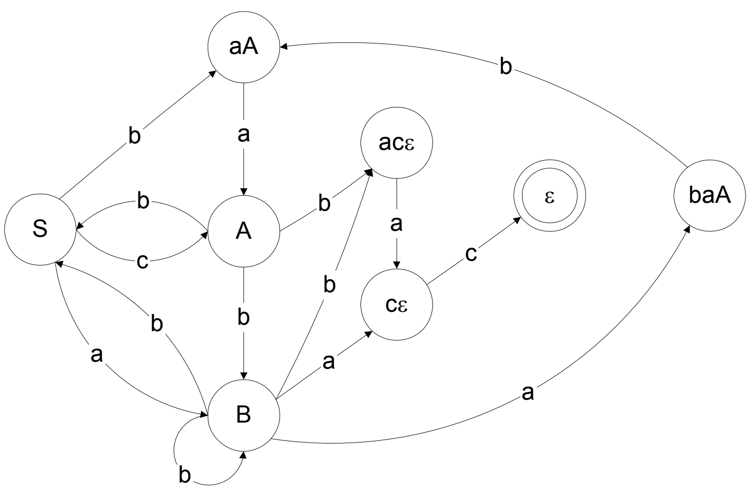
Riješe se desne strane produkcija koje ne završavaju nezavršnim znakom i jedinične produkcije:

A→bac ⇒ A→bac[ε]
B→ac ⇒ B→ac[ε]
B→A ⇒ B→bB, B→bac[ε], B→bS

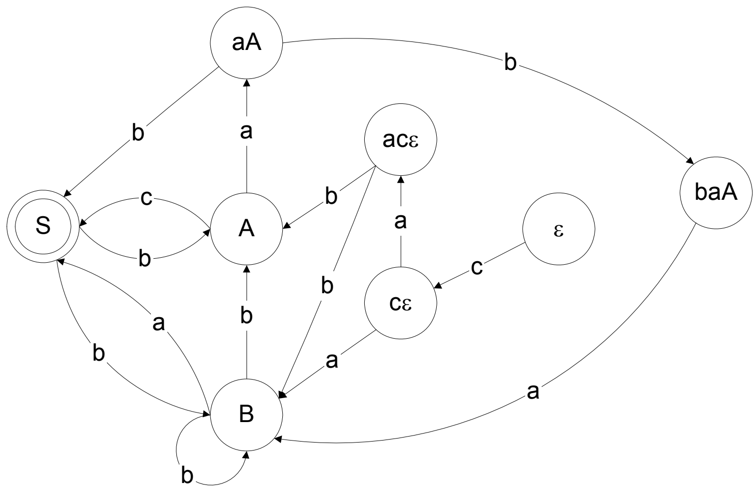
Na kraju se rješavaju desne strane produkcija s više od dva znaka:

S→cA	A→bB	B→bB	[aA]→aA
S→b[aA]	A→b[acε]	B→b[acε]	[acε]→a[cε]
S→aB	A→bS	B→bS	[cε]→c[ε]
		B→a[cε]	[baA]→b[aA]
		B→a[baA]	[ε]→ε

Konstruira se NKA koji prihvaća nizove koje generira gramatika G':



Zamijeni se početno i prihvatljivo stanje, okrenu se smjerovi grana i dobije se NKA koji prihvaća nizove koje generira gramatika G:



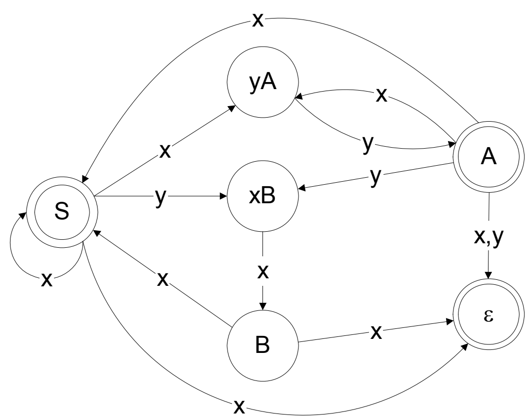
15. Zadanu gramatiku G pretvoriti u lijevo-linearnu gramatiku.

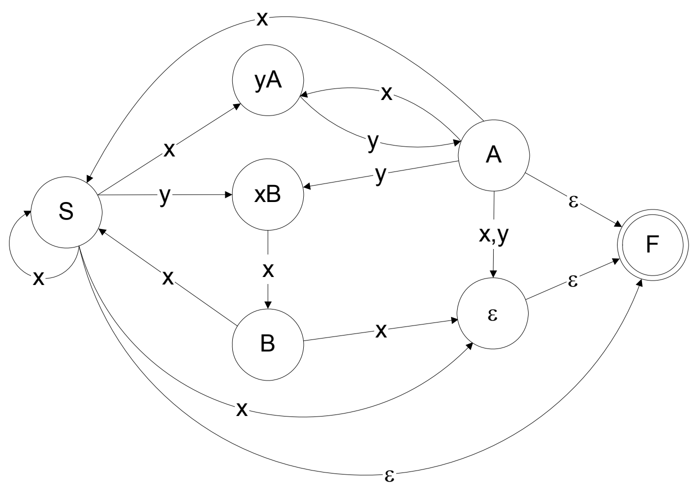
S→xyA	**A→S**
S→yxB	**A→y**
S→B	**B→xS**
S→ε	**B→x**

Gramatika G pretvori se u desno-linearnu gramatiku G':

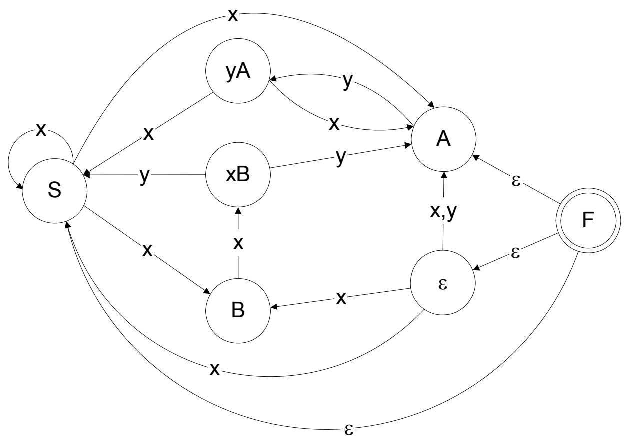
S→x[yA]	A→x[yA]	B→xS
S→y[xB]	A→y[xB]	B→x[ε]
S→xS	A→xS	[yA]→yA
S→x[ε]	A→x[ε]	[xB]→xB
S→ε	A→y[ε]	[ε]→ε
	A→ε	

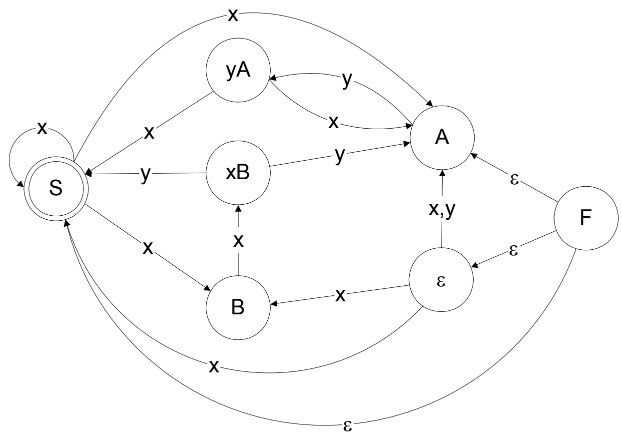
Izgradi se NKA M za gramatiku G' i preuredi se u ε-NKA M' tako da ima samo jedno prihvatljivo stanje:



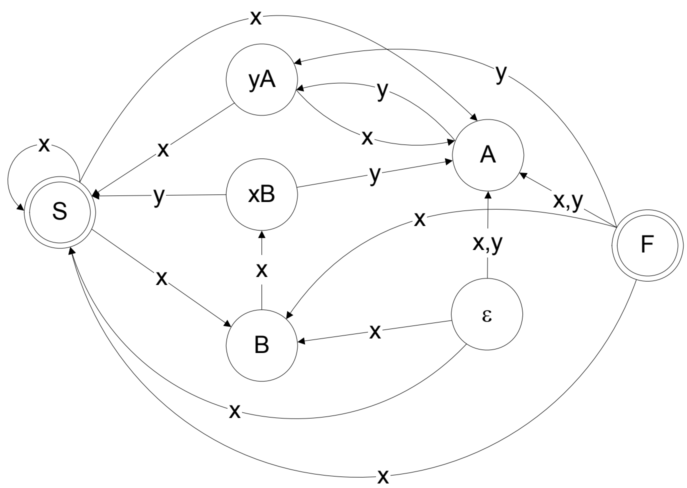


Grane ε-NKA M' okrenu se i zamijeni se prihvatljivost početnog i završnog stanja tako da se dobije ε-NKA M" koji prihvaća obrnute nizove:





ε-NKA M" pretvori se u NKA M''' pri čemu stanje ε postaje nedohvatljivo pa se može izbaciti:



Za NKA M''' konstruira se gramatika G" koja generira iste nizove:

F→xS	S→xS	A→y[yA]	[xB]→yS
F→xA	S→xA	B→x[xB]	[xB]→yA
F→xB	S→xB		[yA]→xS
F→yA	S→ε		[yA]→xA
F→y[yA]			
F→ε			

Gramatika G" generira nizove koji su obrnuti u odnosu na nizove gramatike G. Produkcije gramatike G" se okrenu, izvrši se supstitucija F→S' i S→F' te se dobije gramatika G''' koja je lijevo linearna i generira iste nizove kao i gramatika G:

S'→F'x	F'→F'x	A→[yA]y	[xB]→F'y
S'→Ax	F'→Ax	B→[xB]x	[xB]→Ay
S'→Bx	F'→Bx		[yA]→F'x
S'→Ay	F'→ε		[yA]→Ax
S'→[yA]y			
S'→ε			

Moguće je još izvršiti supstituciju nezavršnih znakova [yA] i [xB] njihovim desnim stranama i tako dobiti gramatiku koja je sličnija gramatici G:

$S' \to F'x$	$F' \to F'x$	$A \to F'xy$
$S' \to Ax$	$F' \to Ax$	$A \to Axy$
$S' \to Bx$	$F' \to Bx$	$B \to F'yx$
$S' \to Ay$	$F' \to \varepsilon$	$B \to Ayx$
$S' \to F'xy$		
$S' \to Axy$		
$S' \to \varepsilon$		

<u>Alternativni način rješavanja</u>

Izravna pretvorba desno-linearne gramatike u lijevo-linearnu gramatiku

Desno-linearna gramatika (DLG) – *generira niz slijeva na desno, odnosno od početka prema kraju*
Lijevo-linearna gramatika (LLG) – *generira niz zdesna na lijevo, odnosno od kraja prema početku*

Zadatak: *pretvorba desno-linearne gramatike u lijevo-linearnu gramatiku*

U skup nezavršnih znakova gramatike LLG dodaje se novi nezavršni znak F koji započinje generiranje niza od kraja prema početku:

LLG=(V,T,P,F)
V={S,A,B,F}
F je početni nezavršni znak u LLG

Dodaju se prijelazi iz znaka F u sve nezavršne znakove koji na desnoj strani imaju isključivo završne znakove ili ε-produkcije:

za $A \to \varepsilon$	$\Rightarrow$	$F \to A$	$A \in V$
za $A \to a_1 a_2 \ldots a_n$	$\Rightarrow$	$F \to A\ a_1 a_2 \ldots a_n$	$A \in V$, $a_i \in T$

$F \to S$
$F \to Ay$
$F \to Bx$

U svim ostalim produkcijama okrene se redoslijed generiranja međunizova tako da produkcije generiraju nizove od kraja prema početku:

za $A \to B$	$\Rightarrow$	$B \to A$	$A, B \in V$
za $A \to a_1 a_2 \ldots a_n B$	$\Rightarrow$	$B \to A\ a_1 a_2 \ldots a_n$	$A, B \in V$, $a_i \in T$

$S \to Bx$	$A \to Sxy$	$B \to S$
$S \to A$		$B \to Syx$

U skup produkcija LLG dodaje se produkcija $S \to \varepsilon$ koja u LLG jedina završava generiranje niza.

Konačna LLG:

$F \to S$	$S \to Bx$	$A \to Sxy$	$B \to S$
$F \to Ay$	$S \to A$		$B \to Syx$
$F \to Bx$	$S \to \varepsilon$		

Dodatno, zamjenom F⇒S' i S⇒F' dobiva se LLG u kojoj je S' početni nezavršni znak:

$S' \to F'$	$F' \to Bx$	$A \to F'\ xy$	$B \to F'$
$S' \to Ay$	$F' \to A$		$B \to F'\ yx$
$S' \to Bx$	$F' \to \varepsilon$		