

DisKontNa Matematika 1, 1. međuispit, 3.5.2012.

Zadatak 1. (5 bod.)

Izračunaj sumu reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 24n + 7}$.

Zadatak 2. (5 bod.)

Izračunaj sumu $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$.

Zadatak 3. (5 bod.)

Zamjenom poretka sumacije, izračunaj sumu $\sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k}$.

Zadatak 4. (5 bod.)

Dokaži identitet: $\sum_{k=-m}^n \binom{r}{m+k} \binom{s}{n-k} = \binom{r+s}{m+n}$.

Zadatak 5. (5 bod.)

Odredi niz (a_n) realnih brojeva za koje vrijedi

$$\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = 1, \quad n \geq 0.$$

Zadatak 6. (5 bod.)

Odredi rekurzivnu relaciju za koeficijente funkcije izvodnice reda

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$$

i izračunaj tu funkciju.

Zadatak 7. (2+2+2 bod.)

Preko skica naznači vezu Catalanovog broja $C_4 = 14$ i sljedećih skupova:

- Skupa binarnih stabala s četiri vrha.
- Skupa ravninskih stabala s pet vrhova.
- Skupa Murasakijevih dijagrama s četiri vertikalne linije.

Zadatak 8. (5+4 bod.)

Dokaži sljedeće identitete za Fibonaccijeve brojeve:

- $\binom{n}{0} F_0 + \binom{n}{1} F_1 + \binom{n}{2} F_2 + \dots + \binom{n}{n} F_n = F_{2n}$.
- $F_1 F_2 + F_2 F_3 + F_3 F_4 + \dots + F_{2n-1} F_{2n} = F_{2n}^2$.

DisKontNa Matematika 1, 1. međuispit, 3.5.2012. – Rješenja

Zadatak 1. Faktorizacija nazivnika glasi

$$9n^2 + 24n + 7 = (3n + 1)(3n + 7).$$

Zato vrijedi

$$\frac{1}{9n^2 + 24n + 7} = \frac{1}{6} \left[\frac{1}{3n + 1} - \frac{1}{3n + 7} \right].$$

Postupkom teleskopiranja suma reda jednaka je:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n^2 + 24n + 7} &= \frac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{3n + 1} - \frac{1}{3n + 7} \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{10} \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{7} - \frac{1}{13} \right] + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{10} - \frac{1}{16} \right] + \dots \\ &= \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{7} \right] = \frac{11}{168}. \end{aligned}$$

Zadatak 2. Rezultat: $n(n + 1)2^{n-2}$. Vidi udžbenik, #2, str 22. Alternativni dokaz, bez uporabe diferencijalnog računa:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^n k^2 \cdot \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} [n - (n-k-1)] \binom{n-1}{k} \\ &= n^2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} - n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \\ &= n^2 \cdot 2^{n-1} - n(n-1) \cdot 2^{n-2} \\ &= n(n+1)2^{n-2}. \end{aligned}$$

Zadatak 3. Rezultat: 3^n . Vidi udžbenik, #2, str 26.

Zadatak 4. Stavimo $j = m + k$. Onda se identitet svodi na

$$\sum_{j=0}^{m+n} \binom{r}{j} \binom{s}{m+n-j} = \binom{r+s}{m+n}$$

a to je Vandermondeov identitet. Za dokaz vidi udžbenik, #2, str. 9, 18 ili 21.

Zadatak 5. Prema uvjetu vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Ako je $A(x)$ funkcija izvodnica traženog niza, onda je $A(x)^2 = 1/(1-x)$. Sada je

$$A(x) = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n.$$

Oдавде je $a_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

Zadatak 6. Rezultat: $A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Vidi udžbenik, #4, str 15.

Zadatak 7. Za broj $C_3 = 5$ vidi slike u udžbeniku, #5, str 22, 23, 29.

Zadatak 8. (a) Vrijedi

$$\begin{aligned} F_{2n} &= F_{2n-2} + F_{2n-1} \\ &= F_{2n-4} + 2F_{2n-3} + F_{2n-2} \\ &= F_{2n-6} + 3F_{2n-5} + 3F_{2n-4} + F_{2n-3} \\ &\quad \vdots \\ &= F_{2n-2k} + \binom{k}{1} F_{2n-2k+1} + \binom{k}{2} F_{2n-2k+2} + \dots + \binom{k}{k-1} F_{2n-k+1} + F_{2n-k} \end{aligned}$$

Relacija se dokazuje indukcijom. Pri tom se koristi definicija Fibonaccijevog niza i temeljna rekurzija za binomne koeficijente: svaki član Fibonaccijevog niza u ovom izrazu zamijeni se sa sumom prethodnih dvaju i nakon sređivanja koeficijent uz Fibonaccijev broj je suma dvaju uzastopnih binomnih koeficijenata. Za $k = n$ dobivamo tvrdnju u zadatku.

Drugo rješenje. Koristimo eksplicitni prikaz Fibonaccijevog broja:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} (\alpha^k + \beta^k)$$

ovdje su α i β brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu

$$\alpha^2 = \alpha + 1.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k &= \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\alpha^k + \beta^k) \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[(1 + \alpha)^n + (1 + \beta)^n \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\alpha^{2n} + \beta^{2n} \right] \\ &= F_{2n}.\end{aligned}$$

(b) Indukcijom. Korak indukcije:

$$\begin{aligned}F_1 F_2 + F_2 F_3 + \dots + F_{2n-1} F_{2n} + F_{2n} F_{2n+1} + F_{2n+1} F_{2n+2} \\ &= F_{2n}^2 + F_{2n} F_{2n+1} + F_{2n+1} F_{2n+2} \\ &= F_{2n} (F_{2n} + F_{2n+1}) + F_{2n+1} F_{2n+2} \\ &= F_{2n} F_{2n+2} + F_{2n+1} F_{2n+2} \\ &= F_{2n+2}^2.\end{aligned}$$