Prvi međuispit iz Linearne algebre

30. ožujka 2009.

1. [**3 boda**] (a) (1 bod) Definirajte polje F. (b) (2 boda) Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}_7$. Izračunajte matricu A^{-1}.

2. [**5 bodova**] (a) (1 bod) Definirajte unitarni prostor X.

   (b) (2 boda) Dokažite da u unitarnom prostoru vrijedi nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowskog.

   (c) (2 boda) U prostoru $X = \mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom izračunajte $\dim L(e_1, e_2, e_3)^\perp$, ako je $e_1 = (0, 1, 2, -1)$, $e_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $e_3 = (-1, 2, 5, -1)$.

3. [**3 boda**] Zadan je skup X svih matrica oblika $A = \begin{bmatrix} \lambda + \mu & 3\lambda \\ -\mu & \lambda - \mu \end{bmatrix}$, gdje su λ i μ iz $\mathbb{R}$. Dokažite da je X vektorski potprostor prostora $M_{2,2}$. Odredite neku bazu i nađite dimenziju od X.

4. [**3 boda**] (a) (2 boda) Izvedite formulu za ortogonalnu projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ u unitarnom prostoru X.

   (b) (1 bod) Nađite ortogonalnu projekciju funkcije $f(x) = x + 1$ na funkciju $g(x) = \cos 2x$ u unitarnom prostoru $L^2(0, 2\pi)$ s uobičajenim skalarnim produktom.

5. [**2 boda**] Na skupu svih matrica $M_{2,2}$ s realnim koeficijentima definiramo $\|A\| = |a| + 3|b| + 2|c| + |d|$, gdje je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Dokažite da je to norma na vektorskom prostoru $M_{2,2}$. Izračunajte međusobnu udaljenost matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ s obzirom na tu normu.

6. [**3 boda**] (a) (1 bod) Dokažite da slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

   (b) (1 bod) Neka je A kvadratna matrica reda n s koeficijentima iz $\mathbb{C}$. Rabeći Schurov teorem dokažite da je determinanta od A jednaka umnošku svih njenih vlastitih vrijednosti, tj. $\det A = \lambda_1 \ldots \lambda_n$.

   (c) (1 bod) Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ odredite njen spektar.

7. [**2 boda**] Odredite matricu linearnog operatora $A : P_3 \to M_{2,2}$ definiranog sa

$$A(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & a_1 - 2a_2 \\ a_3 & a_0 + 2a_1 - 2a_2 + a_3 \end{bmatrix}$$

   u paru kanonskih baza prostora P_3 i $M_{2,2}$, gdje su a_i realni koeficijenti. Odredite rang i defekt tog linearnog operatora.

8. [**4 boda**] (a) (2 boda) Zadan je vektor $\vec{x}$ iz vektorskog prostora X, i dvije baze $e = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ i $e' = \{\vec{e}_1{}', \ldots, \vec{e}_n{}'\}$ u X. Neka je $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ i $\vec{x} = x_1'\vec{e}_1{}' + \ldots + x_n'\vec{e}_n{}'$. Dokažite da za $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ i $x' = (x_1', \ldots, x_n')^\top$ vrijedi $x = Tx'$ pri čemu je T matrica prijelaza iz baze e u bazu e'.

   (b) (2 boda) Zadan je linearni operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koji u kanonskoj bazi ima matricu

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

   Odredite matricu istog operatora u novoj bazi $\{(1, 2), (-1, 3)\}$. Je li operator A regularan?