

Prvi međuispit iz Linearne algebre

8. travnja 2010.

- [3 boda]** Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ s koeficijentima iz polja \mathbb{Z}_5 . Nađite matricu \mathbf{A}^{-1} i riješite matričnu jednadžbu $\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
- [4 boda]** (a) (2 boda) U prostoru $X = \mathbb{R}^5$ sa standardnim skalarnim produktom odredite neku bazu u podprostoru $L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^\perp$, ako je $\mathbf{e}_1 = (1, 2, 0, 0, -1)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 3, 0, -2)$, $\mathbf{e}_3 = (1, 0, 6, 0, 3)$, i izračunajte mu dimenziju.
(b) Neka je X unitaran prostor nad poljem realnih brojeva, a $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ pripadajuća norma inducirana skalarnim produktom. Pokažite da za sve $u, v \in X$ vrijedi $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ i $(u|v) = \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2)$.
- [3 boda]** (a) (1 bod) Neka je $\mathbf{A} = (a_{ij})$ kompleksna matrica reda 2. Definiramo *trag matrice* kao zbroj njenih dijagonalnih elemenata, tj. $\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22}$. Odredite matricu operatora $\text{tr} : M_{22}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ u paru kanonskih baza (kanonska baza u \mathbb{C} je 1).
(b) (2 boda) Zadana je matrica $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ s kompleksnim koeficijentima. Definirajmo skup X u $M_{22}(\mathbb{C})$ sa $X = \{\mathbf{A} \in M_{22}(\mathbb{C}) : \text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}) = 0\}$. Dokažite da je X (kompleksni) vektorski podprostor od $M_{22}(\mathbb{C})$ i odredite mu neku bazu.
- [3 boda]** (a) (1 bod) Definirajte normirani prostor X .
(b) (2 boda) Pokažite da je na prostoru P_3 svih polinoma s realnim koeficijentima formulom

$$\|a + bx + cx^2 + dx^3\| = \frac{1}{3}|a| + \frac{1}{2}|b| + |c| + 2|d|$$

definirana norma. Izračunajte udaljenost polinoma $f(x) = x^2 + 4x^3$ i $g(x) = 3 + 8x - 3x^2$.¹

5. [3 boda] (a) (2 boda) Izvedite formulu za ortogonalnu projekciju vektora \mathbf{b} na vektor $\mathbf{a} \neq 0$ u unitarnom prostoru X .

(b) (1 bod) Nađite ortogonalnu projekciju funkcije $f(x) = x$ na funkciju $g(x) = e^x$ u prostoru $L^2(0, \ln 2)$ sa standardnim skalarnim produktom.

6. [4 boda] Neka je operator $A : P_2 \rightarrow P_3$ definiran sa

$$(Ap)(t) = \int_0^t p(x) dx + tp'(t) + p(t).$$

(a) (2 boda) Pokažite da je A linearni operator i nađite mu matricu u paru kanonskih baza u P_2 i P_3 .

(b) (2 boda) Odredite neku bazu za njegovu jezgru i neku bazu za njegovu sliku, te izračunajte rang i defekt.

7. [3 boda] (a) (1 bod) Neka su $A : X \rightarrow Y$ i $B : Y \rightarrow Z$ linearni operatori. Pokažite da je kompozicija $B \circ A : X \rightarrow Z$ također linearni operator.

(b) Neka su X , Y i Z vektorski prostori i $\mathbf{e} = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza u X , $\mathbf{f} = \{f_1, \dots, f_m\}$ baza u Y i $\mathbf{g} = \{g_1, \dots, g_p\}$ baza u Z . Ako linearni operator $A : X \rightarrow Y$ ima u paru baza \mathbf{e} i \mathbf{f} matricu \mathbf{A} , a linearni operator $B : Y \rightarrow Z$ u paru baza \mathbf{f} i \mathbf{g} matricu \mathbf{B} , dokažite da operator $B \circ A$ ima u paru baza \mathbf{e} i \mathbf{g} matricu $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$.

8. [2 boda] Neka je $A : V^3 \rightarrow V^3$ linearni operator zadan u kanonskoj bazi svojom matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Izračunajte $A(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k})$.

(b) Nađite matricu tog istog operatora u bazi koju čine vektori $\mathbf{e} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{f} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{g} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$.