

Prvi međuispit iz Linearne algebre

21. ožujka 2011.

1. [3 boda] Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3a \end{bmatrix}$ s koeficijentima iz polja \mathbb{Z}_5 .

(a) Odredite sve $a \in \mathbb{Z}_5$ za koje je matrica \mathbf{A} regularna.

(b) Izračunajte \mathbf{A}^{-1} za $a = 3$ i riješite za taj a jednadžbu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ako je $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

2. [2 boda] Zadani su vektori $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 2, 3)$, $\mathbf{a}_2 = (1, 3, -1, 0)$ i $\mathbf{a}_3 = (2, -1, \lambda, 1)$ u \mathbb{R}^4 , pri čemu je λ realan broj. Odredite sve $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje su ti vektori linearno nezavisni.

3. [3 boda] Zadani su polinomi

$$p_1(t) = 1 - 2t + 3t^2, \quad p_2(t) = 2 + t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + 3t - 2t^2,$$

$$q_1(t) = t, \quad q_2(t) = 3 - t + 4t^2$$

s realnim koeficijentima. Neka je $X = L(p_1, p_2, p_3)$ i $Y = L(q_1, q_2)$. Odredite dimenziju prostora $X \cap Y$ i nađite neku njegovu bazu.

4. [2 boda] Zadan je skup X svih matrica oblika

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2a + b & -b \\ a & a - b \end{bmatrix}$$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$. Dokažite da je X vektorski podprostor prostora $M_{22}(\mathbb{R})$. Odredite mu neku bazu i dimenziju.

5. [4 boda] (a) (3 boda) Neka je $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$. Pokažite da je s

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle := \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

zadan jedan skalarni produkt na prostoru \mathbb{R}^2 .

(b) (1 bod) Izračunajte udaljenost vektora $(1, 2)$ i $(3, -1)$ u normi induciranoj skalarnim produktom iz (a).

Okrenite!

6. [3 boda] (a) (2 boda) Neka je X unitaran prostor i E podprostor od X razapet vektorima $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ pri čemu su oni međusobno ortogonalni. Izvedite formulu za ortogonalnu projekciju vektora $\mathbf{x} \in X$ na podprostor E .

(b) (1 bod) Nađite projekciju funkcije

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 3, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

na $L(\sin x, \cos x)$ u prostoru $L^2(-\pi, \pi)$ sa standardnim skalarnim produktom.

7. [4 boda] Neka je $f: P_3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ funkcija zadana s

$$f(p) = (p(1), p'(0) + 2p''(0) - p'''(0), 2p(0) + 3p'(0) + p'''(0)).$$

(a) (2 boda) Pokažite da je f linearni operator i odredite mu matricu u paru kanonskih baza prostora P_3 i \mathbb{R}^3 .

(b) (2 boda) Odredite neku bazu za jezgru i sliku operatora f te izračunajte njegov rang i defekt.

8. [4 boda] (a) (2 boda) Zadan je linearni operator $A: X \rightarrow X$. Neka su $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ i $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$ dvije baze u X . Neka je \mathbf{A} matrica operatora A u prvoj bazi te \mathbf{A}' matrica operatora A u drugoj bazi. Pokažite da vrijedi $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ pri čemu je \mathbf{T} matrica prijelaza iz prve baze u drugu bazu.

(b) (2 boda) Neka je $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linearni operator zadan u kanonskoj bazi svojom matricom

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Nađite matricu tog istog operatora u bazi koju čine vektori $\{(1, 1, 0), (1, 2, 1), (1, 3, 1)\}$.