Prvi međuispit iz Linearne algebre

2. travnja 2012.

1. [**3 boda**] Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}_5$.

   (a) Odredite sve $a \in \mathbb{Z}_5$ za koje je matrica $\mathbf{A}$ regularna.

   (b) Za $a = 3$ riješite jednadžbu $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ ako je $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2. [**5 bodova**] (a) Definirajte unitarni prostor X.

   (b) Dokažite da u unitarnom prostoru vrijedi nejednakost Cauchy-Schwarz-Buniakowskog.

   (c) U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom izračunajte $\dim L(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)^\perp$ pri čemu su
   $$\mathbf{e}_1 = (1, -1, 2, 0),\ \ \mathbf{e}_2 = (0, 1, -3, 1),\ \ \mathbf{e}_3 = (2, 1, -5, 3).$$

3. [**3 boda**] Pokažite da podskup
   $$Y = \left\{ p(t) \in P_3 \;\middle|\; p''(0) + \int_0^1 p(\tau)\, d\tau = 0,\ \int_{-1}^1 p(\tau)\, d\tau = 0 \right\}$$
   čini vektorski podprostor prostora polinoma P_3. Nađite mu neku bazu i odredite mu dimenziju.

4. [**3 boda**] Zadani su podprostori
   $$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x_1 + x_3 - x_4 = 0,\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \right\},$$
   $$N = L\big((1, 0, 0, 0), (1, -1, 0, -1)\big)$$
   od $\mathbb{R}^4$. Odredite bazu i dimenziju prostora M i $M \cap N$.

5. [**4 boda**] Pokažite da su funkcije $g(x) = x$ i $h(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ ortogonalne u prostoru $L^2(-1, 1)$. Nađite ortogonalnu projekciju funkcije
   $$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-1, 0) \\ 2x, & x \in [0, 1) \end{cases}$$
   na podprostor od $L^2(-1, 1)$ razapet funkcijama g i h.

Okrenite!

6. **[2 boda]** Zadana je funkcija $\|\cdot\|: M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ formulom

$$\|A\| = |a| + 2\,|b| + |d|\,, \text{ gdje je } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

   (a) Pokažite da je to norma na podprostoru X od $M_2(\mathbb{R})$ na kojem je $c = 0$, tj.

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (b) Pokažite da to nije norma na cijelom $M_2(\mathbb{R})$.

7. **[5 bodova]** (a) Neka je $A\colon X \to Y$ linearni operator. Dokažite da je jezgra linearnog operatora A podprostor od X, a slika podprostor od Y.

   (b) Zadan je operator $A\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ formulom

$$A(a, b, c, d) = (a - b + 2c, a - 3b + 7c - 3d, 2a - c + 3d).$$

   Pokažite da je operator A linearan. Nađite mu matricu u paru kanonskih baza od $\mathbb{R}^4$ i $\mathbb{R}^3$ te odredite neku bazu za njegovu jezgru.