Drugi međuispit iz Linearne algebre

11. svibnja 2009.

1. [**4 boda**] Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) (2 boda) Odredite sve vlastite vektore matrice A.

   (b) (1 bod) Odredite matricu T takvu da je $T^{-1}AT$ dijagonalna.

   (c) (1 bod) Rabeći Hamilton - Cayleyev teorem izračunajte A^{-1}.

2. [**3 boda**] (a) (1 bod) Provjerite da za svaku kvadratnu matricu A s realnim koeficijentima vrijedi $\langle Ax|y\rangle = \langle x|A^\top y\rangle$ za sve $x, y \in \mathbb{C}^n$.

   (b) (1 bod) Zadana je simetrična matrica A. Pomoću (a) pokažite da su sve vlastite vrijednosti matrice A realne.

   (c) (1 bod) Koristeći (b) pokažite da su vlastiti vektori simetrične matrice koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima međusobno okomiti.

3. [**4 boda**] (a) (2 boda) Dokažite da ako je S ortogonalna matrica, onda je $S^{-1} = S^\top$ i obratno.

   (b) (1 bod) Neka je S ortogonalna matrica. Provjerite da je $\|Sx\| = \|x\|$ za sve vektore x, pri čemu je norma euklidska.

   (c) (1 bod) Ako je A matrica operatora rotacije za kut $\frac{\pi}{3}$ oko ishodišta, a B matrica operatora simetrije s obzirom na pravac $y = x$, obje zadane u kanonskoj bazi, pokažite da je matrica AB ortogonalna.

4. [**3 boda**] (a) (1 bod) Obrazložite zašto za bilo koju operatorsku normu vrijedi $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, gdje su A i B kvadratne matrice istog reda.[1]

[1]

Okrenite!

(b) (2 boda) Neka je A matrica tipa $m \times n$. Izračunajte čemu je jednaka sljedeća operatorska norma

$$\|A\|_\infty := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty},$$

u ovisnosti o koeficijentima matrice $A = (a_{ij})$.

5. [**4 boda**] (a) (2 boda) Dokažite da red $e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ konvergira za svaku kvadratnu matricu A.

   (b) (1 bod) Izračunajte matricu e^A ako je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (c) (1 bod) Odredite spektar matrice e^A iz (b).

6. [**4 boda**] (a) (1 bod) Formulirajte teorem o Jordanovoj formi matrice.

   (b) (1 bod) Odredite $\lim\limits_{k \to \infty} A^k$ za matricu

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.6 & 0.3 \\ -0.3 & 0.1 & 0.2 \\ 0.4 & -0.1 & -0.2 \end{bmatrix}.$$

   (c) (2 boda) Iskažite i dokažite teorem o Neumannovom redu za matricu $(I - A)^{-1}$.

7. [**3 boda**] Izračunajte matricu $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$