Drugi međuispit iz Linearne algebre

13. svibnja 2010.

1. **[3 boda]** Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$.

   (a) Odredite spektar te matrice.

   (b) Odredite vlastite podprostore koji pripadaju vlastitim vrijednostima matrice A.

   (c) Neka je $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator zadan s $A(x) = \mathbf{A}x$. Odredite neku bazu u $\mathbb{R}^2$ (ako je to moguće) u kojoj je matrica $\mathbf{A}'$ operatora A dijagonalna.

2. **[2 boda]** Odredite matricu $\mathbf{A}$ operatora ortogonalnog projiciranja u (x, y)-ravnini na pravac $y = -x$ u kanonskoj bazi. Odredite matricu $\mathbf{A}'$ tog istog operatora s obzirom na bazu $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ koja nastaje iz kanonske baze $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ rotacijom za $45°$.

3. **[3 boda]** (a) (1 bod) Dokažite da slične kvadratne matrice imaju isti karakteristični polinom.

   (b) (2 boda) Dokažite da je slobodni koeficijent u karakterističnom polinomu matrice $\mathbf{A}$ reda n jednak $(-1)^n \det \mathbf{A}$.

4. **[2 boda]** Odredite karakteristični polinom matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Rabeći Hamilton-Cayleyev teorem izračunajte A^{-1}.

5. **[2 boda]** Zadan je linearni operator $A : P_2 \to P_2$ sa $(Ap)(t) = t^2 p''(t) + 2tp'(t) + 3p(t)$.

   (a) Odredite spektralni radijus tog operatora.

   (b) Ispitajte je li on izomorfizam.

6. **[4 boda]** (a) (1 bod) Detaljno iskažite teorem o dijagonalizaciji simetrične matrice.

   (b) (3 boda) Odredite dijagonalnu matricu $\mathbf{D}$ i ortogonalnu matricu $\mathbf{S}$ tako da za matricu $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ vrijedi $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D}$.

7. **[2 boda]** Zadana je simetrična matrica $\mathbf{A}$. Dokažite da različitim vlastitim vrijednostima matrice $\mathbf{A}$ pripadaju međusobno *okomiti* vlastiti vektori.

8. **[2 boda]** Zadan je skup funkcija $\{x^2, x^3, x^4\}$. Ortonormirajte taj skup s obzirom na skalarni produkt $(f \mid g) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$.[1]

---

[1]

Okrenite!

9. **[2 boda]** U skupu svih matrica oblika $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2s+3 & 4 \\ 5 & 2t+1 \end{bmatrix}$, gdje su s i t realni brojevi, odredite onu koja je najbliža matrici $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ s obzirom na $\|\cdot\|_\infty$-normu.

10. **[3 boda]** (a) (2 boda) Zadana je kvadratna matrica $\mathbf{A}$. Dokažite da je matrica $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2 + \ldots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k + \ldots$ dobro definirana, tj. da red matrica konvergira u prostoru $M_{n,n}(\mathbb{R})$ svih matrica reda n.

    (b) Izračunajte matricu $e^{\mathbf{A}}$ za $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.