# Drugi međuispit iz Linearne algebre

2. svibnja 2011.

1. [**4 boda**] Zadana je matrica $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

   (a) Odredite sve vlastite vrijednosti matrice $\mathbf{A}$.

   (b) Odredite sve pripadne vlastite podprostore matrice $\mathbf{A}$.

   (c) Odredite matricu $\mathbf{T}$ tako da matrica $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$ bude dijagonalna.

   (d) Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem izračunajte $\mathbf{A}^3$.

2. [**4 boda**] (a) (2 boda) Dokažite da su vlastiti vektori koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima matrice $\mathbf{A}$ linearno nezavisni.

   (b) (2 boda) Dokažite da su sve vlastite vrijednosti simetrične matrice $\mathbf{S}$ realne.

3. [**4 boda**] Zadan je linearni operator $L\colon M_{22}(\mathbb{R}) \to M_{22}(\mathbb{R})$ sa

$$L(\mathbf{X}) = \mathbf{XP} + \mathbf{AXB}$$

   pri čemu su

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Odredite matricu tog operatora u kanonskoj bazi, karakteristični polinom te matrice. S pomoću tog polinoma ispitajte regularnost operatora $L$.

4. [**3 boda**] Standardni skalarni produkt na prostoru $M_{22}(\mathbb{C})$ definira se kao $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) = \mathrm{Tr}(\mathbf{B}^* \cdot \mathbf{A})$. Pri čemu se trag matrice, u oznaci Tr, definira kao zbroj svih elemenata na njenoj glavnoj dijagonali. Gramm-Schmidtovim postupkom ortonormirajte skup

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \right\}.$$

5. [**3 boda**] (a) (2 boda) Neka je $\mathbf{J} = \lambda\mathbf{I} + \mathbf{N}$ elementarna Jordanova klijetka reda $m$ ($\mathbf{N}$ je standardna nilpotentna matrica s jedinicama na sporednoj dijagonali. Ako je $P(x)$ polinom $k$-tog stupnja, izračunajte matricu $P(\mathbf{J})$.

   (b) (1 bod) Koristeći Jordanov teorem dokažite da je matrica $\mathbf{N}$ nilpotentna (tj. neka njena potencija je nul-matrica) onda i samo onda ako su joj sve vlastite vrijednosti 0.

Okrenite!

6. **[3 boda]** (a) (2 boda) Definirajte ortogonalnu matricu. Dokažite da za ortogonalne matrice $\mathbf{S}$ vrijedi $\|\mathbf{Sx}\| = \|\mathbf{x}\|$, gdje je norma euklidska.

   (b) (1 bod) Je li matrica $\mathbf{S} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ ortogonalna? Odredite njen inverz.

7. **[4 boda]** Neka su $X$ i $Y$ normirani prostori, i $\mathcal{L}(X, Y)$ prostor svih neprekinutih linearnih operatora iz $X$ u $Y$.

   (a) (2 boda) Dokažite da je za bilo koji operator $A \in L(X, Y)$ sa $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ zadana operatorska norma na $L(X, Y)$.

   (a) (1 bod) Provjerite da za $A, B \in L(X, Y)$ vrijedi $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, gdje je norma operatorska.

   (b) (1 bod) Zadane su matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

   Izračunajte njihovu međusobnu udaljenost s obzirom na $\infty$-normu.