Drugi međuispit iz Linearne algebre

7. svibnja 2012.

1. [**4 boda**] Operator A u ravnini djeluje tako da prvo rotira vektor za $\pi/6$ u pozitivnom smjeru oko ishodišta, a zatim ga projicira na pravac $y = \sqrt{3}x$.

   (a) Odredite matricu operatora A u kanonskoj bazi.

   (b) Odredite neku bazu za njegovu sliku i jezgru.

   (c) Odredite spektar operatora A^{10}.

2. [**4 boda**] (a) Definirajte pojam izomorfizma vektorskih prostora X i Y.

   (b) Neka je $A\colon X \to Y$ izomorfizam vektorskih prostora i $\mathbf{e}_1, \dots \mathbf{e}_n$ baza za X. Pokažite da je $A(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_n)$ baza za Y.

   (c) Neka je linearni operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan s

   $$A(x_1, x_2, x_3) = (-3x_1 + x_3, -2x_2 - 2x_3, 3x_1 - x_2 - 3x_3).$$

   Je li operator A izomorfizam? Ako jest, nađite mu inverzan operator.

3. [**3 boda**] Zadana je matrica

   $$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -12 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

   Odredite sve vlastite vrijednosti i vlastite podprostore matrice $\mathbf{A}$. Može li se matrica $\mathbf{A}$ dijagonalizirati?

4. [**3 boda**] (a) Dokažite da za svaku realnu kvadratnu matricu $\mathbf{A}$ i sve $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ uz standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ vrijedi

   $$(\mathbf{A}\mathbf{x} \,|\, \mathbf{y}) = (\mathbf{x} \,|\, \mathbf{A}^\top \mathbf{y})$$

   (b) Rabeći činjenicu da su vlastite vrijednosti simetrične matrice realne, dokažite da su vlastiti vektori simetrične matrice koji odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima međusobno ortogonalni.

5. [**3 boda**] U Lebesgueovom prostoru $L^2(0,1)$ sa standardnim skalarnim produktom zadane su funkcije $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ i $h(x) = x^3$.

   (a) Dokažite da su funkcije f, g i h linearno nezavisne.

   (b) Provedite Gramm-Schmidtov postupak ortogonalizacije skupa $\{f, g, h\}$.

Okrenite!

6. **[3 boda]** (a) Pokažite da je slobodan član u karakterističnom polinomu matrice $\mathbf{A}$ jednak $(-1)^n \det \mathbf{A}$.

   (b) Rabeći Hamilton-Cayleyev teorem izračunajte $\mathbf{A}^{-2}$ za matricu

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

7. **[5 bodova]** Zadana je matrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Dokažite da je matrica $\mathbf{A}$ slična dijagonalnoj.

   (b) Odredite neku pripadnu matricu sličnosti.

   (c) Izračunajte $\mathbf{A}^{100}$.