

**Završni ispit iz Matematike 3E**  
30.01.2007.

**Pitanja iz 3. ciklusa nastave**

1. [2 boda] Izračunajte gradijent skalarnog polja  $f(x, y, z) = \ln \frac{yz}{x} + 2$ .  
Odredite točku  $T$  za koju je  $(\text{grad } f)_T = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ .

2. [2 boda] Izračunajte usmjerenu derivaciju polja  $f(x, y, z) = x - y^2z$  u smjeru vektora  $\overrightarrow{AB}$  gdje je  $A(1, -1, 3)$  i  $B(4, 1, 3)$ .

3. [2 boda] Izračunajte usmjerenu derivaciju polja

$$\vec{v}(x, y, z) = xz\vec{i} + 3\vec{j} - y\sqrt{z}\vec{k}$$

u točki  $T(0, -4, 1)$  u smjeru vektora  $\vec{s} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ .

4. [2 boda] Izračunajte

$$\nabla \left[ (\vec{a} \cdot \vec{r}) \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right]$$

gdje je  $\vec{a}$  konstantan vektor,  $\vec{r}$  radijvektor i  $r = |\vec{r}|$ .

5. [3 boda] Izračunajte  $\oint_K \vec{a} \, d\vec{r}$ , ako je  $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j}$ , a krivulja  $K$  je presječnica ploha  $x^2 + y^2 = 4$  i  $y + z = 3$ , i orijentirana je u pozitivnom smjeru gledano iz točke  $(0, 0, 4)$ .

6. [3 boda] Napišite definiciju potencijalnog (konzervativnog) vektorskog polja. Proverite da li je polje  $\vec{a} = \frac{1}{x^2}\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$  potencijalno (konzervativno). Ako jest, izračunajte njegov potencijal.

7. [3 boda] Izračunajte  $\iint_S dS$  pri čemu je  $S$  dio plohe  $x^2 + z^2 = 1$  za koji je  $y \geq 0$  i  $y \leq z$ . Nacrtajte sliku.

8. [3 boda] Izračunajte

$$\iint_S \sqrt{z} \, dy \, dz$$

gdje je  $S$  vanjska strana dijela plohe  $z = x^2 + y^2$  za koju je  $0 \leq z \leq 4$ . Nacrtajte sliku.

## Pitanja iz cijelog gradiva

9. [3 boda] Funkciju

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi, & x \in \langle -\pi, 0 \rangle, \\ x - \pi, & x \in \langle 0, \pi \rangle, \end{cases} \quad (1)$$

razvijte u trigonometrijski Fourierov red i pomoću tog razvoja nađite sumu reda  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k+1}$ .

10. a) [1 bod] Napišite Teorem o deriviranju originala.

b) [3 boda] Laplaceovom transformacijom izračunati struju  $i(t)$  strujnog kruga zadanog slikom uz priključeni napon  $e(t) = \sin(3t)u(t)$ .

11. [4 boda] Izračunati

$$\iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz$$

gdje je područje  $V = \{(x, y, z) : \frac{x^2 + y^2}{2} \leq z \leq 2\}$ .

12. [4 boda] Primjenom Stokesove formule izračunati

$$\oint_{\mathcal{K}} y dx + z dy + x dz$$

gdje je krivulja  $K$  presječnica ploha  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  i  $x + z = 0$ , orijentirana u pozitivnom smjeru gledano iz točke  $(0, 0, a)$ .

**Napomena:** Vrijeme pisanja je **2,5 sata**.