Ponovljeni prvi međuispit iz Linearne algebre

14. srpnja 2009.

1. [**2 boda**] Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$
s elementima iz polja $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nađite i ispišite sva netrivijalna (različita od 0) rješenja jednadžbe $Ax = 0$ pri čemu je x vektor s komponentama iz $\mathbb{Z}_7$.

2. [**5 bodova**] (a) (1 bod) Definirajte linearni omotač vektora $x_1, \ldots, x_n$.

   (b) (3 boda) Neka je $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}$. Pokažite da je X vektorski prostor, odredite neku bazu za njega i izračunajte mu dimenziju.

   (c) (1 bod) Nađite neku ortonormiranu bazu za $X^\perp$ (X definiran u (b)) sadržanu u $\mathbb{R}^n$. (Skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ je standardan).

3. [**4 boda**] Zadan je linearni operator $A\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ sa
$$A\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = (2a_1 + a_2, -6a_1 + 3a_3 + 3a_4, 4a_2 + a_3 + 2a_4).$$

   (a) (2 boda) Odredite matricu tog linearnog operatora u paru kanonskih baza od $M_{2,2}(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^3$.

   (b) (2 boda) Odredite neku bazu za sliku, te izračunajte defekt tog linearnog operatora.

4. [**3 boda**] (a) (1 bod) Definirajte ortogonalnu projekciju vektora x na vektor $e \neq 0$.

   (b) (2 boda) Nađite ortogonalnu projekciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -2i & 2 \end{bmatrix}$ na matricu $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -i & -3 \end{bmatrix}$ pri čemu je na prostoru $M_{2,2}(\mathbb{C})$ skalarni produkt zadan sa $(A|B) := \mathrm{tr}(B^* A)$. (Trag matrice se definira kao zbroj njenih dijagonalnih elemenata, $B^* = \overline{B}^\top$.)

5. [**2 boda**] Na skupu $M_{2,3}$ svih matrica
$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},$$
gdje su $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, zadana je norma $\|A\| = |a| + 2|b| + 3|c| + 4|d| + 5|e| + 6|f|$.

   (a) (1 bod) Pokažite da je to zaista norma.

Okrenite!

(b) (1 bod) Nađite udaljenost matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ u toj normi.

6. [**3 boda**] (a) (1 bod) Neka je linearni operator $\mathcal{A}$ prikazan matricom A u bazi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vektorskog prostora X. Neka je T matrica prijelaza iz stare baze u novu bazu $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$. Pokažite da tada operatoru $\mathcal{A}$ u novoj bazi odgovara matrica $A' = T^{-1}AT$.

   (b) (2 boda) Zadan je linearni operator $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ matricom

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   u kanonskoj bazi. Odredite matricu istog operatora u bazi $\{(3,-4)^\top, (-3,5)^\top\}$.

7. [**2 boda**] (a) (1 bod) Neka je p pravac kroz ishodište u ravnini koji s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut α. Izvedite matricu operatora simetrije ravnine obzirom na taj pravac u kanonskoj bazi.

   (b) (1 bod) Nađite matricu operatora simetrije ravnine obzirom na pravac $y = \sqrt{3}\,x$ u kanonskoj bazi.

8. [**4 boda**] (a) (3 boda) Iskažite i dokažite teorem o rangu i defektu.

   (b) (1 bod) Neka je operator $A\colon \mathbb{R}^3 \to P_2$ zadan sa

$$A(a,b,c) = ax^2 + (a+b)x + (a+b+c).$$

   Provjerite je li operator A regularan.