Ponovljeni prvi međuispit iz Linearne algebre

7. srpnja 2010.

1. [**2 boda**] Zadane su matrice $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ s koeficijentima iz polja $\mathbb{Z}_3$. Riješite matričnu jednadžbu $\mathbf{AX} + \mathbf{B} = 0$.

2. [**5 bodova**] (a) (1 bod) Definirajte skalarni produkt na realnom vektorskom prostoru X.

   (b) (2 boda) Dokažite da u unitarnom prostoru vrijedi nejednakost Cauchy - Schwarz - Buniakowskog.

   (c) (2 boda) U prostoru $X = M_{2,2}(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom definiranim na način $(A|B) := \mathrm{tr}(B^\top A)$ odredite neku bazu u podprostoru $L(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{E}_3)^\perp$, ako je

   $$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   te mu izračunajte dimenziju. (Trag matrice, u oznaci tr, definira se kao zbroj svih elemenata na njezinoj glavnoj dijagonali).

3. [**3 boda**] Zadan je skup X svih polinoma oblika

   $$\lambda + \mu + 2\lambda x + (3\mu - \nu)x^2 - \nu x^3$$

   pri čemu su $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$. Pokažite da je to vektorski podprostor od P_3, nađite mu neku bazu te odredite njegovu dimenziju.

4. [**5 bodova**] Zadana je matrica

   $$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}.$$

   Definiramo preslikavanje $L\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ na način $L(\mathbf{A}) := (\mathbf{XA})^\top$.

   (a) (1 bod) Pokažite da je L linearni operator.

   (b) (2 boda) Nađite matricu operatora L u paru kanonskih baza prostora $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

   (c) (2 boda) Nađite neku bazu za jezgru operatora L i izračunajte njegov rang.

5. [**2 boda**] Zadani su vektori $\mathbf{a} = (1, i, i, 1)$ i $\mathbf{b} = (-i, 1+i, 2, 2)$ iz prostora $\mathbb{C}^4$. Ortogonalno projicirajte vektor $\mathbf{b}$ na vektor $\mathbf{a}$ uz standardni skalarni produkt na $\mathbb{C}^4$.

6. [**5 bodova**] (a) (1 bod) Izvedite matricu operatora rotacije ravnine oko ishodišta za kut α u kanonskoj bazi.

   (b) (1 bod) Nađite matricu operatora $\mathbf{A}$ rotacije ravnine oko ishodišta za kut $\alpha = \frac{\pi}{3}$ u kanonskoj bazi.

   (c) (2 boda) Odredite matricu operatora $\mathbf{A}$ u bazi $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ pri čemu je $\mathbf{e} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$, $\mathbf{f} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j}$.

   (d) (1 bod) Je li operator iz (b) regularan? Odgovor obrazložite!

7. [**3 boda**] Iskažite i dokažite teorem o rangu i defektu linearnog operatora.