Ponovljeni drugi međuispit iz Linearne algebre

14. srpnja 2009.

1. [**3 boda**] (a) (1 bod) Formulirajte Hamilton - Cayleyev teorem.

   (b) (2 boda) Rabeći Hamilton - Cayleyev teorem izračunajte A^{-1} pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. [**2 boda**] Pokažite da je sa $(A|B) := \operatorname{tr}(B^*A)$ zadan skalarni produkt na prostoru $M_{2,2}(\mathbb{C})$. Izračunajte $(A|B)$ za $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 2i \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. (Trag matrice se definira kao zbroj njenih dijagonalnih elemenata.)

3. [**5 bodova**] Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1 bod) Odredite njen spektar.

   (b) (1 bod) Za svaku vlastitu vrijednost matrice A odredite pripadni vlastiti potprostor.

   (c) (2 boda) Odredite Jordanovu formu matrice A.

   (d) (1 bod) Pomoću (c) izračunajte $\sin\left(\frac{\pi}{2}A\right)$.

4. [**2 boda**] Gramm - Schmidtovim postupkom ortonormirajte u odnosu na standardni skalarni produkt vektore $(1,1,1)$ i $(0,2,1)$ te novodobivene vektore nadopunite do ortonormirane baze za $\mathbb{R}^3$.

5. [**3 boda**] (a) (1 bod) Definirajte ortogonalnu matricu.

   (b) (1 bod) Dokažite da ortogonalna matrica S ima determinantu 1 ili -1.

   (c) (1 bod) Pokažite da ortogonalna matrica S čuva euklidsku normu, tj. $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$ za svaki vektor x.

6. [**4 boda**] (a) (1 bod) Definirajte operatorsku normu matrice A.

   (b) (1 bod) Matematičkom indukcijom dokažite da za operatorsku normu kvadratne matrice A vrijedi $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Okrenite!

(c) (2 boda) Dokažite da za operatorsku 1-normu na prostoru $M_{m,n}$ vrijedi

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

7. [**3 boda**] (a) (2 boda) Dokažite da za kvadratnu matricu A s kompleksnim koeficijentima vrijedi $r(A) < 1$ ako i samo ako $A^k \to 0$ kad $k \to \infty$.

   (b) (1 bod) Konvergira li niz matrica A^k kada $k \to \infty$ pri čemu je

$$A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}?$$

   Odgovor obrazložite!

8. [**3 boda**] Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{1}{9} \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) (2 boda) Dokažite da red $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergira.

   (b) (1 bod) Izračunajte sumu reda iz (a).