

Ponovljeni drugi međuispit iz Linearne algebre

7. srpnja 2010.

1. [3 boda] (a) (1 bod) Za kvadratnu matricu $\mathbf{A} = (a_{ij})$ definiramo njen trag kao $\text{tr } \mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$. Dokažite da slične matrice imaju isti trag.
- (b) (2 boda) Rabeći Hamilton - Cayleyev teorem izračunajte \mathbf{A}^3 pri čemu je

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. [2 boda] Pokažite da je sa $(\mathbf{A}|\mathbf{B}) := \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{ij} \bar{b}_{ij}$ zadan skalarni produkt na prostoru $M_{2,2}(\mathbb{C})$ svih matrica reda 2 s kompleksnim koeficijentima. Izračunajte $(\mathbf{A}|\mathbf{B})$ za

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ i } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+i & -i \\ 0 & i \end{bmatrix}.$$

3. [5 bodova] Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}.$$

- (a) (1 bod) Odredite njen spektar.
- (b) (1 bod) Za svaku vlastitu vrijednost matrice \mathbf{A} odredite pripadni vlastiti podprostor.
- (c) (2 boda) Odredite Jordanovu formu matrice \mathbf{A} i neku matricu sličnosti.
- (d) (1 bod) Pomoću (c) izračunajte $\sin \mathbf{A}$.
4. [2 boda] Na vektorskom prostoru P_2 svih polinoma najviše drugog stupnja je zadan skalarni produkt

$$(p|q) := p(0)q(0) + p'(0)q'(0) + \frac{1}{4}p''(0)q''(0).$$

Gramm - Schmidtovim postupkom ortonormirajte funkcije $1+x+x^2$ i $2x+x^2$, te novodobivene funkcije nadopunite do ortonormirane baze za P_2 .

5. [4 boda] (a) (2 boda) Provjerite da skup simetričnih matrica reda n čini vektorski prostor. Odredite dimenziju tog prostora.
- (b) (2 bod) Dokažite da svaka simetrična matrica ima realne vlastite vrijednosti.

Okrenite!

6. [3 boda] (a) (1 bod) Dokažite da za operatorsku normu vrijedi $\|\mathbf{AB}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$, gdje su \mathbf{A} i \mathbf{B} kvadratne matrice istog reda.

(b) (2 boda) Dokažite da za operatorsku ∞ -normu na prostoru $M_{m,n}$ svih realnih matrica tipa $m \times n$ vrijedi

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

7. [3 boda] (a) (2 boda) Dokažite da za kvadratnu matricu A s kompleksnim koeficijentima vrijedi $r(A) < 1$ onda i samo onda ako $A^k \rightarrow 0$ kad $k \rightarrow \infty$.

(b) (1 bod) Konvergira li slijed matrica \mathbf{A}^k kada $k \rightarrow \infty$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{5}{9} & \frac{3}{9} \\ -\frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{bmatrix}?$$

Odgovor obrazložite!

8. [3 boda] Zadana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & a \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

(a) (2 boda) Odredite sve $a \in \mathbb{R}$ za koje red $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ konvergira.

(b) (1 bod) Izračunajte sumu reda iz (a) za bilo koji takav $a \in \mathbb{R}$.