Ponovljeni završni ispit iz Linearne algebre

14. srpnja 2009.

1. [**2 boda**] Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$
s elementima iz polja $\mathbb{Z}_7 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Nađite i ispišite sva netrivijalna (različita od 0) rješenja jednadžbe $Ax = 0$ pri čemu je x vektor s komponentama iz $\mathbb{Z}_7$.

2. [**5 bodova**] (a) (1 bod) Definirajte linearni omotač vektora $x_1, \ldots, x_n$.

   (b) (3 boda) Neka je $X = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1 + \ldots + x_n = 0\}$. Pokažite da je X vektorski prostor, odredite neku bazu za njega i izračunajte mu dimenziju.

   (c) (1 bod) Nađite neku ortonormiranu bazu za $X^\perp$ (X definiran u (b)) sadržanu u $\mathbb{R}^n$. (Skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ je standardan).

3. [**4 boda**] Zadan je linearni operator $A\colon M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ sa
$$A\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = (2a_1 + a_2, -6a_1 + 3a_3 + 3a_4, 4a_2 + a_3 + 2a_4).$$

   (a) (2 boda) Odredite matricu tog linearnog operatora u paru kanonskih baza od $M_{2,2}(\mathbb{R})$ i $\mathbb{R}^3$.

   (b) (2 boda) Odredite neku bazu za sliku, te izračnajte defekt tog linearnog operatora.

4. [**2 boda**] Pokažite da je sa $(A|B) := \operatorname{tr}(B^*A)$ zadan skalarni produkt na prostoru $M_{2,2}(\mathbb{C})$. Izračunajte $(A|B)$ za $A = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 2i \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. (Trag matrice se definira kao zbroj njenih dijagonalnih elemenata.)

5. [**5 bodova**] Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

   (a) (1 bod) Odredite njen spektar.

   (b) (1 bod) Za svaku vlastitu vrijednost matrice A odredite pripadni vlastiti potprostor.

   (c) (2 boda) Odredite Jordanovu formu matrice A.

   (d) (1 bod) Pomoću (c) izračunajte $\sin\left(\frac{\pi}{2}A\right)$.

Okrenite!

6. [**3 boda**] (a) (1 bod) Definirajte ortogonalnu matricu.

   (b) (1 bod) Dokažite da ortogonalna matrica S ima determinantu 1 ili -1.

   (c) (1 bod) Pokažite da ortogonalna matrica S čuva euklidsku normu, tj. $\|Sx\|_2 = \|x\|_2$ za svaki vektor x.

7. [**5 bodova**] (a) (3 boda) Dokažite da za spektralnu normu vrijedi $\|A\|_2 = \sqrt{r(A^*A)}$, gdje je A kvadratna matrica s kompleksnim koeficijentima.

   (b) (2 boda) Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Rabeći spektralni teorem izračunajte njenu spektralnu normu.

8. [**3 boda**] (a) (2 boda) Opišite Gauss - Seidelovu metodu općenito. Navedite teorem o nužnim i dovoljnim uvjetima za konvergenciju te metode.

   (b) (1 bod) Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$
   Pokažite da za navedenu matricu Gauss - Seidelova metoda konvergira za svaki $b \in \mathbb{R}^3$.

9. [**6 bodova**] Zadana je matrica
$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$
   (a) (3 boda) Odredite skraćenu singularnu dekompoziciju te matrice.

   (b) (2 boda) Pomoću skraćene singularne dekompozicije matrice A^+ odredite pseudoinverz matrice A.

   (c) (1 bod) Odredite $x \in \mathbb{R}^2$ tako da je za $b = (25, 50, 14)^\top$ vrijednost $\|Ax - b\|_2$ minimalna.

10. [**5 bodova**] Zadan je sustav diferencijalnih jednadžbi $y_1' = 4y_1 + y_2 + 1$, $y_2' = 4y_2 + e^{-4t}$.

    (a) (1 bod) Napišite taj sustav u matričnom obliku.

    (b) (2 boda) Izračunajte e^{At}, gdje je A matrica tog sustava.

    (c) (2 boda) Riješite matrični sustav iz (a) uz početni uvjet $y_1(0) = \frac{1}{4}$, $y_2(0) = 0$, te uz pomoć tog rješenja napišite odgovarajuće rješenje sustava.